现代应用数学丛书

统计分析

〔日〕森口繁一 著

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

統計分析

〔日〕森口繁一 著
刘璋温 譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。結合試驗設計討論統計分析，而重点介紹正交設計的情形，并附有很多例題。本书可供高等学校师生、研究工作者和从事实际工作的工程技术人員参考。

現代应用数学丛书

統 計 分 析

原书名 統 計 解 析
原著者 〔日〕森 口 繁 一
原出版者 岩 波 书 店
譯 者 刘 璋 温

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出003号
新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 3 14/32 字数 79,000
1961年12月第1版 1961年12月第1次印刷
印数 1—10,000

統一书号：13119・439
定 价：(十四) 0.60 元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用數学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其内容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要内容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对内容的处理。为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状況，并对全书内容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文内过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

譯 者 序

本书是从森口繁一著"統計解析"(岩波讲座 現代应用数学)一书譯出的。如原序所說，本书以最小二乘法为理論依据，討論了試驗数据的統計分析，而重点介紹具有正交性的試驗設計和分析。正交設計是試驗設計中应用范圍最广的一种，特别在工业試驗中，它发揮着較大的作用。作者十分强調正交設計的意义。

本书的主要特点是理論与实际兼顾。在叙述一段理論之后，接着就举出具体例題，由淺入深地說明分析方法，并具体地介紹計算步驟。

在翻譯过程中，譯者认为費解的地方，都作了一些注释，指出文献的所在，并在书末补充了一些文献。

本书是一本入門书，它的叙述大致上参照了 Bose[6]。关于試驗設計中的估計和檢驗問題，Bose 的讲义是一本系統而簡明的著作，值得推荐。在本书的基础上，欲进一步深入，除上述 Bose[6]以外，对数学基础較好的讀者，可推荐 Mann[8]，Kempthorne[9]，Scheffé[28] 和增山[22]，[31]；而对从事实际工作的讀者，則推荐 Cochran-Cox[4]，Bennett-Franklin[17] 和 Davies[29]。

本书譯稿承厦門大学李文清副教授审校，提出了不少宝貴意見。在譯稿整理阶段，又得到中国科学院数学研究所錢大同同志的帮助，譯者在此对他們表示感謝。

刘 璋 温 1961年4月北京

序

在一本篇幅較小的书籍中全面地讲解統計分析，就需要以一个原則为主題，研究它在各种場合下如何出現。这里就实用上比較重要的几种情形，討論最小二乘法这个原則所提供的一些标准方法。

第1章叙述基础理論；第2章解說应用这些理論的重要輔助手段；第3章仔細討論占实用設計大部分的"正交"設計；第4章对正交設計的情形，叙述方差分析，而对檢驗問題，只簡单地提及；第5章进一步推广前4章所討論的模型，并对多級"誤差"的情形作了討論。

不用說，这里未提到的重要項目还有很多。但是，作为标准方法的理論基础，本书如果在某种程度上能对讀者有所帮助，将使著者感到榮幸。书中虽然介紹了不少具体例子，但一般理論仍然讲得多了一些，这可以說是不可避免的。因此在閱讀本书时，如能同时参看普通参考书中各个特殊情形的公式，将会有所裨益。

1957年2月　森口繁一

目　　录

第1章 最小二乘法

§1 正規方程

統計分析的中心問題，就是用若干数据来估計参数。这时，"綫性回归模型"

$$y_\alpha = x_{\alpha 1}\beta_1 + x_{\alpha 2}\beta_2 + \cdots + x_{\alpha p}\beta_p + \varepsilon_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, N) \quad (1.1)$$

作为数据的构造来説，其适用范圍是相当广的，此处 $y_1, y_2, \cdots, y_N$ 是 N 个数据；$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$ 是 p 个参数（未知常数）；而系数 $x_{\alpha i}(\alpha = 1, 2, \cdots, N; i = 1, 2, \cdots, p)$ 是已知常数；"誤差"$\varepsilon_\alpha(\alpha = 1, 2, \cdots, N)$ 一般滿足下列四个假定：

(1) 独立性 它們是相互独立的随机变数。

(2) 无偏性 它們的数学期望都是0．用式子来表达，就是

$$E(\varepsilon_\alpha) = 0. \qquad (1.2)$$

(3) 等方差性 它們的方差都相等，記为 σ^2．用式子来表达，就是

$$V(\varepsilon_\alpha) = \sigma^2. \qquad (1.3)$$

(4) 正态性 它們都遵循正态分布。

概括上面所述，可以简单地描述为"誤差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_N$ 相互独立地遵循正态分布 $N(0, \sigma^2)$。"

［注1］ 下面叙述的理論，有許多用不着假定正态性也成立，有許多把独立性的假定放寬为"无相关性"，其理論仍然成立。

［注2］ 一般，数据的标号用希腊字母 α，参数的标号用罗馬字母 i, j 表示。总和記号 $\sum$ 只添有 α 或者 i 时，α 表示从1到 N 的和，i 表示从1到 p 的和。

当找出了綫性回归模型(1.1)中的参数 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$ 的估計値 $b_1, b_2, \cdots, b_p$ 时,滿足下列关系的 e_α 叫做殘差:

$$y_\alpha = x_{\alpha 1}b_1 + x_{\alpha 2}b_2 + \cdots + x_{\alpha p}b_p + e_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, N). \tag{1.4}$$

最小二乘法的原則是,定出估計值 $b_1, b_2, \cdots, b_p$,使得殘差的平方和

$$\sum_\alpha e_\alpha^2 = \sum_\alpha (y_\alpha - x_{\alpha 1}b_1 - x_{\alpha 2}b_2 - \cdots - x_{\alpha p}b_p)^2 \tag{1.5}$$

为最小。

当給定了 $y_1, y_2, \cdots, y_N$ 时,(1.5)是 $b_1, b_2, \cdots, b_p$ 的函数(二次式)。因为这个式子是非負的,所以最小値存在。欲求确定最小値的 $b_1, b_2, \cdots, b_p$,就得使(1.5)中所有 b_i 的偏导数等于0。也就是求

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial b_i}\sum_\alpha e_\alpha^2 = \sum_\alpha (y_\alpha - x_{\alpha 1}b_1 - x_{\alpha 2}b_2 - \cdots - x_{\alpha p}b_p)(-x_{\alpha i}) = 0$$

$$(i = 1, \cdots, p) \tag{1.6}$$

的根。(1.6)是关于 p 个未知数 $b_1, b_2, \cdots, b_p$ 的 p 个联立方程。这种方程叫做正規方程。利用(1.4)可以把这个方程写成

$$\sum_\alpha x_{\alpha i}e_\alpha = 0 \quad (i = 1, \cdots, p), \tag{1.7}$$

又可以整理为

$$\sum_j a_{ij}b_j = B_i \quad (i = 1, \cdots, p), \tag{1.8}$$

此处左边的系数是

$$a_{ij} = \sum_\alpha x_{\alpha i}x_{\alpha j} \quad (i, j = 1, \cdots, p), \tag{1.9}$$

而右边則为

$$B_i = \sum_\alpha x_{\alpha i}y_\alpha \quad (i = 1, \cdots, p). \tag{1.10}$$

如果正規方程的系数矩陣 $[a_{ij}]$ 是滿秩的(其行列式 $|a_{ij}| \neq 0$),那末解必存在,而且是唯一确定的。我們可以把它写成形狀

$$b_i = \sum_j c_{ij}B_j \quad (i = 1, \cdots, p), \tag{1.11}$$

此处 c_{ij} 是$[a_{ij}]$的逆矩陣元素，也就是

$$[c_{ij}]=[a_{ij}]^{-1}. \tag{1.12}$$

[注 3] 矩陣$[a_{ij}]$不是滿秩的情形(当行列式$|a_{ij}|=0$时)，将在§7中討論，本章只討論$|a_{ij}|\neq 0$的情形。

最小二乘估計值(正規方程的解)$b_1, b_2, \cdots, b_p$使得(1.5)为最小，而計算这个最小值S_E，可以利用下列公式：

$$S_E=\sum_\alpha y_\alpha^2-\sum_i b_i B_i. \tag{1.13}$$

証明 从(1.5)出发，应用(1.6)，然后再用(1.10)便得

$$\begin{aligned}S_E&=\sum_\alpha\left(y_\alpha-\sum_i x_{\alpha i}b_i\right)^2=\sum_\alpha\left(y_\alpha-\sum_i x_{\alpha i}b_i\right)\left(y_\alpha-\sum_j x_{\alpha j}b_j\right)\\&=\sum_\alpha y_\alpha\left(y_\alpha-\sum_j x_{\alpha j}b_j\right)-\sum_i\sum_\alpha x_{\alpha i}b_i\left(y_\alpha-\sum_j x_{\alpha j}b_j\right)\\&=\sum_\alpha y_\alpha^2-\sum_\alpha\sum_j x_{\alpha j}y_\alpha b_j=\sum_\alpha y_\alpha^2-\sum_j b_j B_j.\end{aligned}$$

証毕

(1.13)的意义是，“最小二乘估計的殘差平方和，可以从未加工数据的平方和减去正規方程的解与其右边乘积之和而得到。”由此，当N比p大时，可以节省相当多的計算手續。

§2 最小二乘估計的性质

下面計算上节引进的各种量的数学期望，方差和协方差。

首先，对于数据$y_1, y_2, \cdots, y_N$，把(1.2)应用于(1.1)，便知其数学期望是

$$E(y_\alpha)=\sum_i x_{\alpha i}\beta_i\quad(\alpha=1, 2, \cdots, N). \tag{2.1}$$

从(1.3)得方差为

$$V(y_\alpha)=\sigma^2\quad(\alpha=1, 2, \cdots, N). \tag{2.2}$$

从假定(1)得协方差为

$$V(y_\alpha, y_\beta)=0\quad(\alpha\neq\beta). \tag{2.3}$$

其次，从(1.9)可知，正規方程左边的系数a_{ij}是常数，但是右

边的 B_i 則随着数据的变化而变化。其性质如下：

$$E(B_i)=\sum_j a_{ij}\beta_j, \tag{2.4}$$

$$V(B_i)=a_{ii}\sigma^2,\ V(B_i,\ B_j)=a_{ij}\sigma^2. \tag{2.5}$$

証明 利用(1.10)，(2.1)和(1.9)便得

$$E(B_i)=\sum_\alpha x_{\alpha i}E(y_\alpha)=\sum_\alpha x_{\alpha i}\Big(\sum_j x_{\alpha j}\beta_j\Big)$$

$$=\sum_j\Big(\sum_\alpha x_{\alpha i}x_{\alpha j}\Big)\beta_j=\sum_j a_{ij}\beta_j.$$

利用(1.10)，(2.2)和(2.3)便得

$$V(B_i,\ B_j)=V\Big(\sum_\alpha x_{\alpha i}y_\alpha,\ \sum_\alpha x_{\alpha j}y_\alpha\Big)=\sum x_{\alpha i}x_{\alpha j}\sigma^2=a_{ij}\sigma^2.$$

这里，特別令 $j=i$，便得 $V(B_i)=a_{ii}\sigma^2$。 証毕

逆矩陣的元素 c_{ij}，因其仅由左边的系数 $a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{pp}$ 确定，所以也是常数。这样，解 b_i 的变化，从(1.11)看来，是由右边 B_j 的变化引起的。其数学期望、方差和协方差求得如下：

$$E(b_i)=\beta_i, \tag{2.6}$$

$$V(b_i)=c_{ii}\sigma^2,\ V(b_i,\ b_j)=c_{ij}\sigma^2. \tag{2.7}$$

証明 利用(1.11)，(2.4)和(1.12)便得

$$E(b_i)=\sum_j c_{ij}E(B_j)=\sum_j c_{ij}\Big(\sum_k a_{jk}\beta_k\Big)$$

$$=\sum_k\Big(\sum_j c_{ij}a_{jk}\Big)\beta_k=\sum_k \delta_{ik}\beta_k=\beta_i.$$

(δ_{ik} 是 Kronecker 記号，即当 $i=k$ 时等于1，当 $i\neq k$ 时等于0。)

其次，利用(1.11)，(2.5)和(1.12)便得

$$V(b_i,\ b_j)=V\Big(\sum_k c_{ik}B_k,\ \sum_h c_{jh}B_h\Big)$$

$$=\sum_k\sum_h c_{ik}c_{jh}V(B_k,\ B_h)=\sum_k\sum_h c_{ik}c_{jh}a_{kh}\sigma^2$$

$$=\sum_k c_{ik}\delta_{jk}\sigma^2=c_{ij}\sigma^2.$$

(計算中利用到对称性 $a_{ij}=a_{ji}$。)

特别令 $j=i$，便得 $V(b_i)=c_{ii}\sigma^2$. 証毕

(2.6)表明 b_i 是 β_i 的无偏估計，而(2.7)提供了有关精度的知識。当任意給定系数 $l_1, l_2, \cdots, l_p$，并考虑参数的一次式

$$\theta=l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_p\beta_p \tag{2.8}$$

时，如果用

$$\hat{\theta}=l_1b_1+l_2b_2+\cdots+l_pb_p \tag{2.9}$$

来估計(2.8)，那末

$$E(\hat{\theta})=\theta, \tag{2.10}$$

$$V(\hat{\theta})=\sum_i\sum_j l_il_jc_{ij}\sigma^2。 \tag{2.11}$$

証明 利用(2.9)，(2.6)和(2.8)，便得

$$E(\hat{\theta})=\sum_i l_iE(b_i)=\sum_i l_i\beta_i=\theta.$$

又利用(2.9)和(2.7)便得

$$V(\hat{\theta})=V\left(\sum_i l_ib_i\right)=\sum_i\sum_j l_il_jV(b_i, b_j)=\sum_i\sum_j l_il_jc_{ij}\sigma^2. \quad 証毕$$

(2.10)表明 $\hat{\theta}=\sum_i l_ib_i$ 是 $\theta=\sum_i l_i\beta_i$ 的无偏估計，而(2.11)表明 $\hat{\theta}$ 的方差可以表示为以逆矩陣$[c_{ij}]$为系数矩陣的 $l_1, l_2, \cdots, l_p$ 的二次型与誤差方差的乘积。

現在，把上面所考虑的 y_α、B_i、b_i 等表达为参数 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$ 和誤差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_N$ 的一次式。

首先，从(1.1)得

$$y_\alpha=\sum_i x_{\alpha i}\beta_i+\varepsilon_\alpha. \tag{2.12}$$

把上式代入(1.10)，并利用(1.9)便得

$$B_i=\sum_\alpha x_{\alpha i}\left(\sum_j x_{\alpha j}\beta_j+\varepsilon_\alpha\right)=\sum_j a_{ij}\beta_j+\sum_\alpha x_{\alpha i}\varepsilon_\alpha. \tag{2.13}$$

再把上式代入(1.11)，并利用(1.12)便得

$$\begin{aligned}b_i&=\sum_j c_{ij}B_j=\sum_j c_{ij}\left(\sum_k a_{jk}\beta_k+\sum_\alpha x_{\alpha j}\varepsilon_\alpha\right)\\&=\beta_i+\sum_\alpha\left(\sum_j c_{ij}x_{\alpha j}\right)\varepsilon_\alpha.\end{aligned} \tag{2.14}$$

可以説，这些式子分别表示着 y_α，B_i 和 b_i 的构造。

这样，如果我們考察(1.4)所定义的殘差 e_α 的构造，那末得到

$$
\begin{aligned}
e_\alpha &= y_\alpha - \sum_i x_{\alpha i} b_i \\
&= \Big(\sum_i x_{\alpha i}\beta_i + \varepsilon_\alpha\Big) - \sum_i x_{\alpha i}\Big(\beta_i + \sum_\beta \sum_j c_{ij} x_{\beta j}\varepsilon_\beta\Big) \\
&= \varepsilon_\alpha - \sum_\beta \Big(\sum_i \sum_j x_{\alpha i} c_{ij} x_{\beta j}\Big)\varepsilon_\beta \\
&= \sum_\beta \Big(\delta_{\alpha\beta} - \sum_i \sum_j x_{\alpha i} c_{ij} x_{\beta j}\Big)\varepsilon_\beta. \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

由此可知，第一，殘差与参数 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$ 无关，它仅受誤差的影响；第二，

$$E(e_\alpha) = 0; \qquad (2.16)$$

第三，还可以証明，对任意的 i 和任意的 α，

$$V(b_i,\ e_\alpha) = 0。 \qquad (2.17)$$

証明　由(2.14)和(2.15)得

$$
\begin{aligned}
V(b_i,\ e_\alpha) &= V\Big(\beta_i + \sum_i \sum_j c_{ij} x_{\gamma j}\varepsilon_\gamma,\ \varepsilon_\alpha - \sum_\beta \sum_h \sum_k x_{\alpha h} c_{hk} x_{\beta k}\varepsilon_\beta\Big) \\
&= V\Big(\sum_\gamma \sum_j c_{ij} x_{\gamma j}\varepsilon_\gamma,\ \varepsilon_\alpha\Big) \\
&\quad - V\Big(\sum_\gamma \sum_j c_{ij} x_{\gamma j}\varepsilon_\gamma,\ \sum_\beta \sum_h \sum_k x_{\alpha h} c_{hk} x_{\beta k}\varepsilon_\beta\Big) \\
&= \sum_j c_{ij} x_{\alpha j}\sigma^2 - \sum_\beta \Big(\sum_j c_{ij} x_{\beta j}\Big)\Big(\sum_h \sum_k x_{\alpha h} c_{hk} x_{\beta k}\Big)\sigma^2 \\
&= \sum_j c_{ij} x_{\alpha j}\sigma^2 - \sum_j \sum_h \sum_k c_{ij} x_{\alpha h} c_{hk} a_{jk}\sigma^2 \\
&= \sum_j c_{ij} x_{\alpha j}\sigma^2 - \sum_j \sum_h c_{ij} x_{\alpha h}\delta_{hj}\sigma^2 = 0。
\end{aligned}
$$

証毕

(2.17)表明任意的估計量 b_i 与任意的殘差 e_α 互不相关。利用这个事实，从(1.4)便得

$$V(y_\alpha) = V\Big(\sum_i x_{\alpha i} b_i\Big) + V(e_\alpha), \qquad (2.18)$$

但因左边等于 σ^2，而右边第一项可以由(2.7)計算为

$$V\left(\sum_i x_{\alpha i}b_i\right)=\sum_i\sum_j x_{\alpha i}x_{\alpha j}V(b_i,\ b_j)$$
$$=\sum_i\sum_j x_{\alpha i}x_{\alpha j}c_{ij}\sigma^2, \tag{2.19}$$

于是得到

$$V(e_\alpha)=\sigma^2-\sum_i\sum_j x_{\alpha i}x_{\alpha j}c_{ij}\sigma^2. \tag{2.20}$$

因为 e_α 的数学期望是 0(見(2.16))，所以(2.20)可以說是 e_α^2 的数学期望。因此，殘差平方和 S_E 的数学期望是

$$E(S_E)=E\left(\sum_\alpha e_\alpha^2\right)$$
$$=\sum_\alpha\left(\sigma^2-\sum_i\sum_j x_{\alpha i}x_{\alpha j}c_{ij}\sigma^2\right)$$
$$=N\sigma^2-\sum_i\sum_j a_{ij}c_{ij}\sigma^2$$
$$=N\sigma^2-\sum_i\delta_{ii}\sigma^2$$
$$=(N-p)\sigma^2. \tag{2.21}$$

由此可知

$$V_E=S_E/(N-p) \tag{2.22}$$

是 σ^2 的无偏估計。

§3 例　　题

在处理实际問題的时候，把数据的构造(1.1)列成表 3.1，把正規方程(1.8)列成表 3.2，并把由正規方程右边所表达的解式(1.11)列成表 3.3，这样，处理起来就比較方便。这些表分别叫做 X 表，A 表和 C 表。

这些表的主要部分已經分别写进了矩陣 $X=[x_{\alpha i}]$，$A=[a_{ij}]$ 和 $C=[c_{ij}]$。于是由(1.9)可知，矩陣 $A=[a_{ij}]$ 可以由矩陣 $X=[x_{\alpha i}]$的列与列的乘积

$$A=X'X \tag{3.1}$$

表 3.1 X 表

β_1	β_2	$\cdots$	β_p	数据
x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1p}	y_1
x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2p}	y_2
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{N1}	x_{N2}	$\cdots$	x_{Np}	y_N

表 3.2 A 表

b_1	b_2	$\cdots$	$b_p=1$	
a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1p}	B_1
a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2p}	B_2
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{p1}	a_{p2}	$\cdots$	a_{pp}	B_p

表 3.3 C 表

	$1=B_1$	B_2	$\cdots$	B_p
b_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1p}
b_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
b_p	c_{p1}	c_{p2}	$\cdots$	c_{pp}

导出。也就是說，矩陣 A 的第 i 行和第 j 列的元素 a_{ij} 等于矩陣 X 的第 i 列与第 j 列的內积。又由(1.10)可知，正規方程的第 i 式右边由矩陣 X 的第 i 列与数据的列的內积給出。(1.12)显然意味着

$$C=A^{-1}. \tag{3.2}$$

現在将§1 和§2 中得到的結論应用于一些具体問題。

例 1 单純的反复观测 設对眞值为 μ 的某个量进行 N 次观测，得到数据 $y_1, y_2, \cdots, y_N$。数据的构造可以写成

$$y_\alpha=\mu+\varepsilon_\alpha \quad (\alpha=1, 2, \cdots, N). \tag{3.3}$$

設上式的誤差滿足假定(1)～(4)。这时参数只有一个 μ，所以 $p=1$，并得 X 表如表 3.4。解正規方程便可求得 μ 的最小二乘估計 m。正規方程只有一个方程，它左边的系数是

表 3.4

μ	数据
1	y_1
1	y_2
$\vdots$	$\vdots$
1	y_N

$$a_{11}=1^2+1^2+\cdots+1^2=N,$$

右边是

$$B_1=1\cdot y_1+1\cdot y_2+\cdots+1\cdot y_N=\sum_\alpha y_\alpha.$$

也就是說，正規方程是

$$Nm=\sum_\alpha y_\alpha, \tag{3.4}$$

解这个方程，便得

$$m=\frac{1}{N}\sum_\alpha y_\alpha. \tag{3.5}$$

这就是說，最小二乘估計 m 就是数据的算术平均值 $\bar{y}$。由于逆矩陣元素只有一个，即 $c_{11}=1/N$。因而，从(2.6)和(2.7)可以推出

$$E(m)=\mu,\quad V(m)=\sigma^2/N. \tag{3.6}$$

又殘差平方和的計算公式(1.13)是

$$S_E=\sum_\alpha y_\alpha^2-m\cdot B_1=\sum_\alpha y_\alpha^2-\left(\sum_\alpha y_\alpha\right)^2\Big/N. \tag{3.7}$$

故由(2.22)可知，这时 $V_E=S_E/(N-1)$ 是誤差方差 σ^2 的无偏估計。此外，$m=\bar{y}$ 与 $e_\alpha=y_\alpha-\bar{y}$ 是互不相关的($V(m,e_\alpha)=0$)。

例2　配通过原点的直綫(图3.1)　对于 x 的值 x_i ($i=1, 2, \cdots, N$)，設 y 的"真值"由 βx_i 給定。若再給它加上誤差 ε_i，便得到观測值 y_i。也就是

$$y_i=\beta x_i+\varepsilon_i\quad (i=1, 2, \cdots, N). \tag{3.8}$$

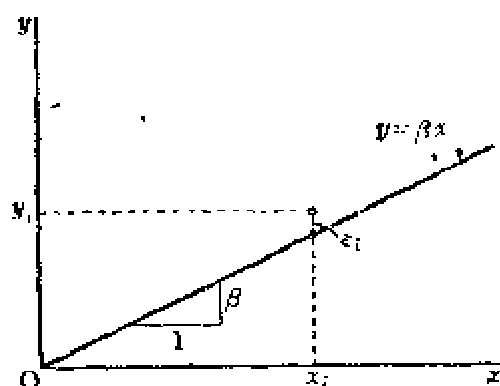


图3.1　通过原点的直綫

表 3.5

β	数据
x_1	y_1
x_2	y_2
⋮	⋮
x_N	y_N

这时，參数的个数 $p=1$，且得 X 表如表3.5。因此，求 β 的估計值 b 的正規方程是

$$\left(\sum_i x_i^2\right)b=\sum_i x_i y_i. \tag{3.9}$$

其解是

$$b=\sum_i x_i y_i\Big/\sum_i x_i^2. \tag{3.10}$$

因为逆矩陣的元素是

$$c_{11}=1\Big/\sum_i x_i^2, \tag{3.11}$$

所以由(2.6)和(2.7)推出

$$E(b)=\beta,\quad V(b)=\sigma^2\Big/\sum_i x_i^2. \tag{3.12}$$

殘差平方和的定义式是

$$S_E=\sum_i (y_i-bx_i)^2, \tag{3.13}$$

而其計算公式(1.13)这时变为

$$S_E=\sum_i y_i^2-\Big(\sum_i x_iy_i\Big)^2\Big/\sum_i x_i^2. \tag{3.14}$$

并且 $V_E=S_E/(N-1)$ 是 σ^2 的无偏估計。

[注] 在例2中，令所有的 x_i 都等于1，就成为例1的情形。

例3 配一般的直綫(图3.2) 設数据的构造为

$$y_i=\alpha+\beta x_i+\varepsilon_i\quad(i=1,2,\cdots,N). \tag{3.15}$$

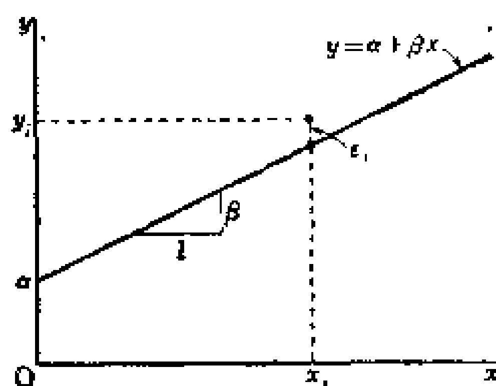


图3.2 一般直綫

表3.6 X表

α	β	数据
1	x_1	y_1
1	x_2	y_2
⋮	⋮	⋮
1	x_N	y_N

于是得 X 表如表3.6。这时，求 α, β 的估計值 a, b 的正規方程的系数是

$$a_{11}=1^2+1^2+\cdots+1^2=N,$$

$$a_{22}=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_N^2=\sum x^2,$$

$$a_{12}=1\cdot x_1+1\cdot x_2+\cdots+1\cdot x_N=\sum x,$$

而其右边是

$$B_1=1\cdot y_1+1\cdot y_2+\cdots+1\cdot y_N=\sum y,$$
$$B_2=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_Ny_N=\sum xy.$$

表3.7　A表

a	b	= 1
N	$\sum x$	$\sum y$
$\sum x$	$\sum x^2$	$\sum xy$

表3.8　C表

1 =	$\sum y$	$\sum xy$
a	$\frac{\sum x^2}{N\sum x^2-(\sum x)^2}$	$\frac{-\sum x}{N\sum x^2-(\sum x)^2}$
b	$\frac{-\sum x}{N\sum x^2-(\sum x)^2}$	$\frac{N}{N\sum x^2-(\sum x)^2}$

因此,得 A 表如表 3.7，得 C 表(逆矩陣)如表 3.8。这就是說，估計值的解是

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{\sum x^2\sum y-\sum x\sum xy}{N\sum x^2-(\sum x)^2},\\ b&=\frac{-\sum x\sum y+N\sum xy}{N\sum x^2-(\sum x)^2}.\end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

由(2.6)和(2.7)，又得到它們的下列性質:

$$E(a)=\alpha,\quad E(b)=\beta, \tag{3.17}$$

$$\left.\begin{aligned} V(a)&=\frac{\sum x^2}{N\sum x^2-(\sum x)^2}\sigma^2,\\ V(b)&=\frac{N}{N\sum x^2-(\sum x)^2}\sigma^2,\\ V(a,b)&=\frac{-\sum x}{N\sum x^2-(\sum x)^2}\sigma^2.\end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

殘差平方和的定义式是

$$S_E=\sum_i(y_i-a-bx_i)^2, \tag{3.19}$$

而計算公式(1.13)变为

$$S_E=\sum_i y_i^2-(a\sum y+b\sum xy). \tag{3.20}$$

并且 $V_E=S_E/(N-2)$ 是 σ^2 的无偏估計(在这种情形下，参数是 α 和 β，所以 $p=2$)。

〔注〕 若設数据的构造为 $y_i=\beta_0+\beta_1(x_i-\bar{x})+\varepsilon_i$，此处 $\bar{x}=\sum_i x_i\Big/N$，则計算頗为簡单(希讀者自己去做——可参看§10)。

例4 組合测定 設有两个物品，它們的重量是 β_1 和 β_2。首先称 β_1 两次得数据 y_1,y_2，其次把两个物品放在一起称得数据 y_3，最后称 β_2 得数据 y_4。这时，数据的构造是

$$\left.\begin{aligned}y_1&=\beta_1\qquad+\varepsilon_1,\\y_2&=\beta_1\qquad+\varepsilon_2,\\y_3&=\beta_1+\beta_2+\varepsilon_3,\\y_4&=\qquad\beta_2+\varepsilon_4.\end{aligned}\right\}\tag{3.21}$$

表3.9　X表

β_1	β_2	数据
1	0	y_1
1	0	y_2
1	1	y_3
0	1	y_4

表3.10　A表

b_1	b_2 =	1
3	1	$B_1=y_1+y_2+y_3$
1	2	$B_2=y_3+y_4$

表3.11　C表

1 =	B_1	B_2
b_1	$\frac{2}{5}$	$\frac{-1}{5}$
b_2	$\frac{-1}{5}$	$\frac{3}{5}$

所以得 X 表如表3.9。由此求 A 表，便得表3.10。这就是説

$$\left.\begin{aligned}3b_1+b_2&=B_1,\\b_1+2b_2&=B_2.\end{aligned}\right\}\tag{3.22}$$

解上列方程，便得

$$\left.\begin{aligned}b_1&=\frac{2}{5}B_1+\frac{-1}{5}B_2,\\b_2&=\frac{-1}{5}B_1+\frac{3}{5}B_2\end{aligned}\right\}\tag{3.23}$$

(表3.11)。这样一来，最小二乘估計是

$$\left.\begin{aligned}b_1&=\frac{1}{5}(2y_1+2y_2+y_3-y_4),\\b_2&=\frac{1}{5}(-y_1-y_2+2y_3+3y_4).\end{aligned}\right\}\tag{3.24}$$

而且它們具有下列性质：

$$E(b_1)=\beta_1, E(b_2)=\beta_2, \tag{3.25}$$

$$V(b_1)=\frac{2}{5}\sigma^2, V(b_2)=\frac{3}{5}\sigma^2, V(b_1, b_2)=\frac{-1}{5}\sigma^2. \tag{3.26}$$

殘差平方和的計算公式(1.13)变成

$$S_E=(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)-(b_1B_1+b_2B_2). \tag{3.27}$$

以 $N-p=4-2=2$ 去除上式，便得到 σ^2 的无偏估計。

[注] (3.26)可以从(3.24)得到，如

$$V(b_1)=\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{-1}{5}\right)^2\right\}\sigma^2=\frac{10}{25}\sigma^2=\frac{2}{5}\sigma^2.$$

但一般从 C 表来求比較簡单。

例 5 合成設計(composite design) ❶，❷ 設数据的构造为

$$y=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_3+\beta_{11}x_1^2+\beta_{22}x_2^2$$
$$+\beta_{33}x_3^2+\beta_{12}x_1x_2+\beta_{13}x_1x_3+\beta_{23}x_2x_3+\varepsilon, \tag{3.28}$$

并取 x_1, x_2, x_3 如表 3.12(图 3.3)。于是得 X 表如表 3.13。

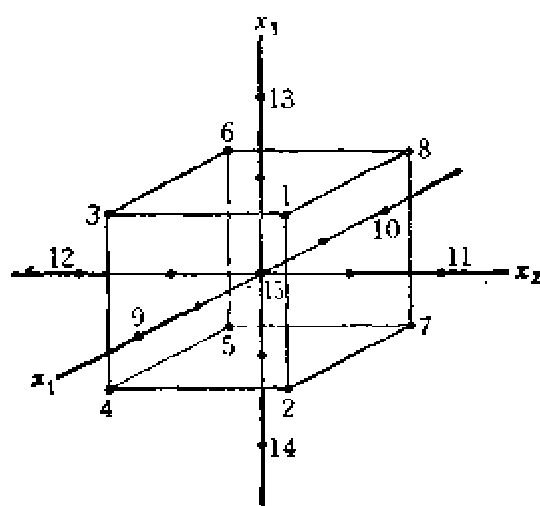


图3.3 合成設計

❶ Box-Wilson: J. Roy. Stat. Soc., Ser. B, 13 (1951), 1～45; Box: Biometrics, 10 (1954), 16～60; 島田：品质管理, 7 (1956), 295; 森口：品质管理, 7 (1956), 433～434.

❷ 这就是所謂"求最优条件的試驗設計"的一个步驟。除上列文献以外，Cochran-Cox [4] 和 Davies [29] 都有詳細的討論。——譯者注

表 3.12　試驗方案

No.	x_1	x_2	x_3
1	1	1	1
2	1	1	−1
3	1	−1	1
4	1	−1	−1
5	−1	−1	−1
6	−1	−1	1
7	−1	1	−1
8	−1	1	1
9	2	0	0
10	−2	0	0
11	0	2	0
12	0	−2	0
13	0	0	2
14	0	0	−2
15	0	0	0

表 3.13　X 表

β_0	β_1	β_2	β_3	β_{11}	β_{22}	β_{33}	β_{12}	β_{13}	β_{23}	数据
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	y_1
1	1	1	−1	1	1	1	1	−1	−1	y_2
1	1	−1	1	1	1	1	−1	1	−1	y_3
1	1	−1	−1	1	1	1	−1	−1	1	y_4
1	−1	−1	−1	1	1	1	1	1	1	y_5
1	−1	−1	1	1	1	1	1	−1	−1	y_6
1	−1	1	−1	1	1	1	−1	1	−1	y_7
1	−1	1	1	1	1	1	−1	−1	1	y_8
1	2	0	0	4	0	0	0	0	0	y_9
1	−2	0	0	4	0	0	0	0	0	y_{10}
1	0	2	0	0	4	0	0	0	0	y_{11}
1	0	−2	0	0	4	0	0	0	0	y_{12}
1	0	0	2	0	0	4	0	0	0	y_{13}
1	0	0	−2	0	0	4	0	0	0	y_{14}
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y_{15}

由此造出正规方程(A 表)，便得表 3.14。例如

$$B_1=y_1+y_2+y_3+y_4-y_5-y_6-y_7-y_8+2y_9-2y_{10},$$

$$B_{22}=y_1+\cdots+y_8+4y_{11}+4y_{12}.$$

表 3.14　A 表

b_0	b_1	b_2	b_3	b_{11}	b_{22}	b_{33}	b_{12}	b_{13}	b_{23}	$=1$
15				16	16	16				B_0
	16									B_1
		16								B_2
			16							B_3
16				40	8	8				B_{11}
16				8	40	8				B_{22}
16				8	8	40				B_{33}
							8			B_{12}
								8		B_{13}
									8	B_{23}

其解如下：

$$b_1=\frac{B_1}{16},\ b_2=\frac{B_2}{16},\ b_3=\frac{B_3}{16},$$

$$b_{12}=\frac{B_{12}}{8},\ b_{13}=\frac{B_{13}}{8},\ b_{23}=\frac{B_{23}}{8},$$

$$b_0=(224B_0-64B_{11}-64B_{22}-64B_{33})/288;$$

$$b_{11}=(-64B_0+26B_{11}+17B_{22}+17B_{33})/288,$$

$$b_{22}=(-64B_0+17B_{11}+26B_{22}+17B_{33})/288,$$

$$b_{33}=(-64B_0+17B_{11}+17B_{22}+26B_{33})/288.$$

§4 綫性估計理論

关于最小二乘法的理論基础，我們可以举出本节将要叙述的綫性估計理論作为范例。

和§1一样，設数据的构造含有 p 个参数 $\beta_i\,(i=1,2,\cdots,p)$，即

$$y_\alpha=\sum_i x_{\alpha i}\beta_i+\varepsilon_\alpha\quad(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ N),\tag{4.1}$$

并設誤差 ε_α 滿足假定(1)～(3)（这里不需要正态性的假設(4)），以及正規方程的系数矩陣 $[a_{ij}]$ 是滿秩的（否則，可以按照§7的方法作变换，除掉无用参数，然后再利用本节的理論）。

这时，我們可以利用数据的一次式

$$\hat{\theta}=\sum_\alpha c_\alpha y_\alpha\tag{4.2}$$

来估計参数的一次式

$$\theta=\sum_i l_i\beta_i.\tag{4.3}$$

适当地定出(4.2)的系数 c_α，使得(4.2)是(4.3)的无偏估計。其条件是

$$E\Big(\sum_\alpha c_\alpha y_\alpha\Big)=\sum_i l_i\beta_i,\tag{4.4}$$

也就是

$$\sum_\alpha c_\alpha\sum_i x_{\alpha i}\beta_i=\sum_i l_i\beta_i.\tag{4.5}$$

所以,不管 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$ 为何值,上式都必須成立。因此,必須有

$$\sum_\alpha c_\alpha x_{\alpha i}=l_i \quad (i=1, 2, \cdots, p). \tag{4.6}$$

当 N 个系数 $c_1, c_2, \cdots, c_N$ 滿足这 p 个关系式时,(4.2)才是(4.3)的无偏估計。

但是,当 $N>p$ 时,这种系数的取法很多,因此,形如(4.2)的无偏估計(綫性无偏估計)也有很多。其中方差为最小的叫做"最优綫性无偏估計"。一般,在假定(1)~(3)之下,形如(4.2)的一次式的方差是

$$V\left(\sum_\alpha c_\alpha y_\alpha\right)=\sum_\alpha c_\alpha^2\sigma^2, \tag{4.7}$$

所以,在滿足(4.6)的 $c_1, c_2, \cdots, c_N$ 中,使 $\sum_\alpha c_\alpha^2$ 为最小的那些給出了最优綫性无偏估計。

我們有下列的

定理 参数一次式的最优綫性无偏估計,由以参数的最小二乘估計代替参数而得的式子給出。

証明 把最小二乘估計 b_i 代入(4.3)的 β_i,然后利用(1.11)和(1.10),便得

$$\begin{aligned}\sum_i l_i b_i&=\sum_i l_i\sum_j c_{ij}B_j=\sum_i l_i\sum_j c_{ij}\sum_\alpha x_{\alpha j}y_\alpha\\&=\sum_\alpha\left(\sum_i\sum_j l_i c_{ij}x_{\alpha j}\right)y_\alpha.\end{aligned} \tag{4.8}$$

上式具有(4.2)的形狀,特别是它的系数为

$$c_\alpha^*=\sum_i\sum_j l_i c_{ij}x_{\alpha j}. \tag{4.9}$$

这滿足无偏性的条件(4.6),可以驗証如下.

$$\sum_\alpha c_\alpha^* x_{\alpha k}=\sum_\alpha\sum_i\sum_j l_i c_{ij}x_{\alpha j}x_{\alpha k}=\sum_i\sum_j l_i c_{ij}a_{jk}=\sum_i l_i\delta_{ik}=l_k. \tag{4.10}$$

因此,对于滿足(4.6)的任意 c_α,有

$$\sum_\alpha(c_\alpha-c_\alpha^*)x_{\alpha i}=l_i-l_i=0. \tag{4.11}$$

再乘上 $\sum_j c_{ij}l_j$ 并对 i 求和,便得

$$\sum_{\alpha}(c_{\alpha}-c_{\alpha}^{*})c_{\alpha}^{*}=0. \tag{4.12}$$

于是

$$\sum_{\alpha}c_{\alpha}^{2}=\sum_{\alpha}\{(c_{\alpha}-c_{\alpha}^{*})+c_{\alpha}^{*}\}^{2}=\sum_{\alpha}(c_{\alpha}-c_{\alpha}^{*})^{2}+\sum_{\alpha}c_{\alpha}^{*2}\geqslant\sum_{\alpha}c_{\alpha}^{*2}. \tag{4.13}$$

这就是説，对于满足(4.6)的任意 c_{α}，有 $\sum_{\alpha}c_{\alpha}^{2}\geqslant\sum_{\alpha}c_{\alpha}^{*2}$。所以，以 c_{α}^{*} 为系数的一次式(4.8)就是最优綫性无偏估計。此外，为使(4.13)的等号成立，对所有的 α 必須有 $c_{\alpha}=c_{\alpha}^{*}$，因此，最优綫性无偏估計是唯一的。 証毕

[注] 有人把上述定理叫做 Марков 定理，我們可以把它叫做綫性估計理論中的主要定理。

§5 正态估計理論

在上节中已經看到，最小二乘估計給出了最优綫性无偏估計。不过，那时对于誤差只假設满足假定(1)～(3)，而不要求正态性的假定(4)。因为，在那里我們只把形如(4.2)的"綫性"估計量当作估計量。如果再加上正态性的假定，那末可以証明，卽使更一般地取估計量来比較，最小二乘估計仍然給出最优的无偏估計量。我們将在本节討論这一点(仍然假設矩陣 $[a_{ij}]$ 是满秩的)。

設数据的构造为

$$y_{\alpha}=\sum_{i}x_{\alpha i}\beta_{i}+\varepsilon_{\alpha}\quad(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ N), \tag{5.1}$$

而誤差 $\varepsilon_{1},\ \varepsilon_{2},\ \cdots,\ \varepsilon_{N}$ 独立地遵循正态分布 $N(0,\sigma^{2})$。这时数据 $y_{1},y_{2},\cdots,y_{N}$ 的联合分布的概率密度是

$$f(y_{1},\ y_{2},\ \cdots,\ y_{N})=\prod_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(y_{\alpha}-\sum_{i}x_{\alpha i}\beta_{i}\right)^{2}\right\}$$
$$=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^{2}}\right)^{\frac{N}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^{2}}\sum_{\alpha}\left(y_{\alpha}-\sum_{i}x_{\alpha i}\beta_{i}\right)^{2}\right\}. \tag{5.2}$$

一般，我們有下列的

定理 当数据$y_1,y_2,\cdots,y_N$的联合分布的概率密度函数$f(y_1,y_2,\cdots,y_N)$恰好依赖于P个参数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_P$时，如果算子

$$L=\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial\theta_i}+\sum_{ij}b_{ij}\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} \tag{5.3}$$

（此处a_i、b_{ij}是只依赖于$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_P$的函数）只依赖于数据的函数$\psi(y_1,y_2,\cdots,y_N)$和只依赖于参数的函数$\Theta(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_P)$，使得

$$L[f]=(\psi-\Theta)f, \tag{5.4}$$

那末ψ就是Θ的无偏估計，并且是Θ的无偏估計量中方差最小的一个。这种估計量实际上是唯一的。

証明 首先，因为f是N維空間的概率密度，所以对于任意的$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_P$有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(y_1,y_2,\cdots,y_N)dy_1dy_2\cdots dy_N=1. \tag{5.5}$$

把算子L作用于上式，再利用(5.4)便得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(\psi-\Theta)fdy_1dy_2\cdots dy_N=0, \tag{5.6}$$

亦即

$$E\psi=\Theta. \tag{5.7}$$

于是ψ是Θ的无偏估計。

其次，令$\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_N)$为$\Theta$的任意无偏估計量，则必須有

$$E\varphi=\Theta. \tag{5.8}$$

从(5.7)和(5.8)推知，对于任意的$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_P$，有

$$E(\varphi-\psi)=0, \tag{5.9}$$

亦即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi-\psi)fdy_1dy_2\cdots dy_N=0. \tag{5.10}$$

把算子L作用于上式，再利用(5.4)便得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi-\psi)(\psi-\Theta)fdy_1dy_2\cdots dy_N=0, \tag{5.11}$$

这意味着

$$V(\varphi-\psi,\ \psi)=0. \tag{5.12}$$

这样，我們可以导出

$$\begin{aligned}V(\varphi)&=V((\varphi-\psi)+\psi)=V(\varphi-\psi)+2V(\varphi-\psi,\ \psi)+V(\psi)\\&=V(\varphi-\psi)+V(\psi)\geqslant V(\psi).\end{aligned} \tag{5.13}$$

由此可知，Θ 的任意无偏估計量 φ 的方差不小于 ψ 的方差。为使(5.13)的等号成立，必須有 $V(\varphi-\psi)=0$。由此以及(5.9)推知，φ 与 ψ 必须具有概率为 1 地相等。 証毕

系 在上述情形中，Θ 的最优无偏估計量 ψ 的方差可以由

$$V(\psi)=L[\Theta] \tag{5.14}$$

求出。

証明 把 L 作用于(5.7)，便得 $E\psi(\psi-\Theta)=L[\Theta]$。但因

$$E\psi(\psi-\Theta)=E\psi^2-\Theta^2=V(\psi),$$

于是(5.14)成立。 証毕

在上述的概率密度(5.2)中，相当于 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p$ 的是 $\beta_i(i=1,2,\cdots,p)$ 和 σ^2 这 $p+1$ 个参数。关于 β_i 微分 $\ln f$，便得

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial\beta_i}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_\alpha\Big(y_\alpha-\sum_k x_{\alpha k}\beta_k\Big)x_{\alpha i}=\frac{1}{\sigma^2}\Big(B_i-\sum_k a_{ik}\beta_k\Big). \tag{5.15}$$

所以，乘上 $\sigma^2\sum_j c_{ij}l_j$ 并对 i 求和，便得

$$\begin{aligned}\frac{1}{f}\sigma^2\sum_i\sum_j c_{ij}l_j\frac{\partial f}{\partial\beta_i}&=\sum_i\sum_j c_{ij}l_j B_i-\sum_i\sum_j\sum_k c_{ij}a_{ik}l_j\beta_k\\&=\sum_j l_jb_j-\sum_j l_j\beta_j.\end{aligned} \tag{5.16}$$

这意味着，对

$$L=\sigma^2\sum_i\sum_j c_{ij}l_j\frac{\partial}{\partial\beta_i} \tag{5.17}$$

来説，

$$\psi=\sum_j l_jb_j, \tag{5.18}$$

$$\Theta=\sum_j l_j\beta_j \tag{5.19}$$

满足条件(5.4)。由此可知，$\sum_j l_j\beta_j$ 的最优无偏估計就是最小二乘估計 $\sum_j l_j b_j$。并由(5.14)推知，它的方差是

$$V\Big(\sum_j l_j b_j\Big)=\sigma^2\sum_i\sum_j c_{ij}l_j\frac{\partial}{\partial\beta_i}\Big(\sum_k l_k\beta_k\Big)=\sum_i\sum_j c_{ij}l_il_j\sigma^2. \quad (5.20)$$

其次，我們将在誤差方差 σ^2 的估計問題上应用上述定理。为了簡单起見，記 $\theta=\sigma^2$，然后关于 θ 微分(5.2)的 ln，便得

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial\theta}=-\frac{N}{2\theta}+\frac{1}{2\theta^2}\sum_\alpha\Big(y_\alpha-\sum_i x_{\alpha i}\beta_i\Big)^2. \quad (5.21)$$

另一方面，关于 β_j 微分(5.15)，便得

$$\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta_i\partial\beta_j}-\frac{1}{f^2}\Big(\frac{\partial f}{\partial\beta_i}\Big)\Big(\frac{\partial f}{\partial\beta_j}\Big)$$
$$=-\frac{1}{\theta}\sum_\alpha x_{\alpha i}x_{\alpha j}=-\frac{1}{\theta}a_{ij}. \quad (5.22)$$

因此，再次利用(5.15)便可导出

$$\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta_i\partial\beta_j}=-\frac{1}{\theta}a_{ij}+\frac{1}{\theta^2}\Big(B_i-\sum_k a_{ik}\beta_k\Big)\Big(B_j-\sum_h a_{jh}\beta_h\Big).$$
$$(5.23)$$

这样，若令

$$L=2\theta^2\frac{\partial}{\partial\theta}-\theta^2\sum_i\sum_j c_{ij}\frac{\partial^2}{\partial\beta_i\partial\beta_j}, \quad (5.24)$$

則对于

$$\psi=\sum_\alpha y_\alpha^2-\sum_i\sum_j c_{ij}\sum_\alpha x_{\alpha i}y_\alpha\sum_\beta x_{\beta j}y_\beta=S_E, \quad (5.25)$$
$$\Theta=(N-p)\theta, \quad (5.26)$$

(5.4)成立。所以，在 $(N-p)\theta$ 的无偏估計量中，S_E 的方差最小。因此，$V_E=S_E/(N-p)$ 是 $\theta=\sigma^2$ 的最优无偏估計。

由(5.14)算得 S_E 的方差是

$$V(\psi)=\Big(2\theta^2\frac{\partial}{\partial\theta}-\theta^2\sum_i\sum_j c_{ij}\frac{\partial^2}{\partial\beta_i\partial\beta_j}\Big)(N-p)\theta=2(N-p)\theta^2.$$
$$(5.27)$$

［注 1］ 上述定理是从 Bhattacharyya❶ 的討論中摘出来的，它是这里所需要的理論。

［注 2］ 即使不假設正态性，但是，如果假設四阶矩存在，并且限制估計量的形式为数据的二次型，那末也可以得到相同的結論（参看 §21 末尾的注）。

---

❶ A. Bhattacharyya: Sankhya, 8 (1946), 1～14; 还可参看 G. R. Seth: Annals of Math. Stat., 20 (1949), 1～27, 特别是 p. 9。

第2章 参数組的变換

§6 变換的一般公式

到此为止，为了簡单起見，我們只討論了正規方程的系数矩陣 $[a_{ij}]$ 是滿秩(行列式 $|a_{ij}|\neq 0$) 的情形．但如果遇到的不是这种情形，就不能使用逆矩陣 $[c_{ij}]$，因此有必要对以前的討論作一些修改．为此，我們先在本节討論参数的綫性变換，作为准备工作。而这个題目本身也是有用的。

設数据的构造由 p 个参数 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$ 表达为

$$y_\alpha=\sum_i x_{\alpha i}\beta_i+\varepsilon_\alpha \quad (\alpha=1, 2, \cdots, N). \tag{6.1}$$

这时我們考慮下列以 p 阶滿秩矩陣 $[p_{ik}]$ 为系数的变換

$$\beta_i=\sum_k p_{ik}\beta'_k \quad (i=1, 2, \cdots, p), \tag{6.2}$$

将原参数組变換为新的参数組 $\beta'_1, \beta'_2, \cdots, \beta'_p$. 这样一来，数据的构造就由新的参数表达为

$$y_\alpha=\sum_k x'_{\alpha k}\beta'_k+\varepsilon_\alpha \quad (\alpha=1, 2, \cdots, N). \tag{6.3}$$

此处，把(6.2)代入(6.1)，便知新的系数 $x'_{\alpha k}$ 是

$$x'_{\alpha k}=\sum_i x_{\alpha i}p_{ik} \quad (\alpha=1, 2, \cdots, N; k=1, 2, \cdots, p). \tag{6.4}$$

因此，新的参数估計值 $b'_1, b'_2, \cdots, b'_p$ 的正規方程是

$$\sum_h a'_{kh}b'_h=B'_k \quad (k=1, 2, \cdots, p), \tag{6.5}$$

其左边的系数是

$$a'_{kh}=\sum_\alpha x'_{\alpha k}x'_{\alpha h}=\sum_\alpha\Big(\sum_i x_{\alpha i}p_{ik}\Big)\Big(\sum_j x_{\alpha j}p_{jh}\Big)=\sum_i\sum_j\Big(\sum_\alpha x_{\alpha i}x_{\alpha j}\Big)p_{ik}p_{jh}$$
$$=\sum_i\sum_j a_{ij}p_{ik}p_{jh} \quad (k, h=1, 2, \cdots, p), \tag{6.6}$$

而其右边则是

$$B'_k=\sum_\alpha x'_{\alpha k}y_\alpha=\sum_\alpha\Big(\sum_i x_{\alpha i}p_{ik}\Big)y_\alpha=\sum_i\Big(\sum_\alpha x_{\alpha i}y_\alpha\Big)p_{ik}$$
$$=\sum_i B_i p_{ik}\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ p). \tag{6.7}$$

如果新的正規方程(6.5)的解可以表达为右边的一次式

$$b'_h=\sum_k c'_{hk}B'_k\quad (h=1,\ 2,\ \cdots,\ p), \tag{6.8}$$

那末利用与(6.2)相同的式子便可求得原参数 β_i 的估計值 b_i 为

$$b_i=\sum_h p_{ih}b'_h\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ p). \tag{6.9}$$

把(6.8)代入上式，再把(6.7)代入 B'_k，便得到

$$b_i=\sum_h\sum_k\sum_j p_{ih}c'_{hk}p_{jk}B_j\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ p). \tag{6.10}$$

上式的形状是

$$b_i=\sum_j c_{ij}B_j\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ p), \tag{6.11}$$

此处

$$c_{ij}=\sum_h\sum_k p_{ih}p_{jk}c'_{hk}\quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p). \tag{6.12}$$

此外，利用(6.9)和(6.7)便可求得解与右边的内积为

$$\sum_i b_iB_i=\sum_i\Big(\sum_h p_{ih}b'_h\Big)B_i=\sum_h\Big(\sum_i B_ip_{ih}\Big)b'_h=\sum_h b'_hB'_h. \tag{6.13}$$

由此可知，它对于現在所考虑的变换是不变的。

例 1 作为极其簡单的特殊情形，設(6.2)具有下列形状(尺度变化)：

$$\beta_i=p_i\beta'_i\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ p). \tag{6.14}$$

这时(6.4)，(6.6)，(6.7)，(6.9)和(6.12)分别是

$$x'_{\alpha i}=x_{\alpha i}p_i\quad (\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ N;\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ p), \tag{6.15}$$
$$a'_{ij}=a_{ij}p_ip_j\quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p), \tag{6.16}$$
$$B'_i=B_ip_i\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ p), \tag{6.17}$$
$$b_i=p_ib'_i\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ p), \tag{6.18}$$

和

$$c_{ij}=p_ip_jc'_{ij}\quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p). \tag{6.19}$$

[注] 这个变换在实际的数值計算中常常用到，其要点是，适当地取 p_i

为10的乘幂，使得变换后的正規方程的系数不致于太大。

例2 一般假設矩陣$[p_{ik}]$是滿秩的，所以它的逆矩陣$[q_{ki}]$存在。若利用这个逆矩陣来写变换公式，則对应于(6.2)，(6.4)，(6.6)，(6.7)，(6.9)和(6.12)，分別有

$$\beta'_k=\sum_i q_{ki}\beta_i \quad (k=1, 2, \cdots, p), \tag{6.20}$$

$$x_{\alpha i}=\sum_k x'_{\alpha k}q_{ki} \quad (i=1, 2, \cdots, p), \tag{6.21}$$

$$a_{ij}=\sum_h\sum_k a'_{hk}q_{hi}q_{kj} \quad (i, j=1, 2, \cdots, p), \tag{6.22}$$

$$B_i=\sum_k B'_k q_{ki} \quad (i=1, 2, \cdots, p), \tag{6.23}$$

$$b'_k=\sum_i q_{ki}b_i \quad (k=1, 2, \cdots, p), \tag{6.24}$$

和

$$c'_{hk}=\sum_i\sum_j q_{hi}q_{kj}c_{ij} \quad (h, k=1, 2, \cdots, p). \tag{6.25}$$

§7　无用参数存在的情形

本节討論正規方程的系数矩陣$[a_{ij}]$是非滿秩(行列式$|a_{ij}|=0$)的情形。

一般，矩陣$[a_{ij}]$是对称而且半正定的(注1)。因此，它的特征値是正的或等于0．設其中正的有r个($r\leqslant p$)。r与$[a_{ij}]$的秩相等．若$r=p$，則$[a_{ij}]$是滿秩的。本节以下討論$r<p$的情形。

在上节所討論的变换中，若特別地选擇适当的矩陣$[p_{ik}]$，則可以使得新的矩陣$[a'_{hk}]$具有下列形狀：

$$[a'_{hk}]=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \tag{7.1}$$

此处$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$都是正的数(可以把这些数看做特征値，但不这样做也可以)．于是$a'_{hk}=0\ (h\neq k)$，而且

$$\left.\begin{aligned} a'_{kk}&=\lambda_k \quad (k=1, \cdots, r), \\ &=0 \quad (k=r+1, \cdots, p). \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

但是，一般有 $a'_{kk}=\sum_{\alpha}(x'_{\alpha k})^2$，所以从(7.2)的后面 $p-r$ 个式子便可得出

$$x'_{\alpha k}=0 \quad (\alpha=1, \cdots, N;\ k=r+1, \cdots, p), \tag{7.3}$$

因此

$$B'_k=\sum_{\alpha} x'_{\alpha k} y_\alpha=0 \quad (k=r+1, \cdots, p). \tag{7.4}$$

这样，新的正规方程具有下列形状：

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 b'_1=B'_1, \ \cdots, \ \lambda_r b'_r=B'_r, \\ 0\cdot b'_{r+1}=0, \quad \cdots, \ 0\cdot b'_p=0. \end{array}\right\} \tag{7.5}$$

其中，前面的 r 个方程可以立刻解出，即

$$b'_k=B'_k/\lambda_k \quad (k=1, \cdots, r). \tag{7.6}$$

但是，$b'_{r+1}, \cdots, b'_p$ 是不定的。这意味着，无論 $b'_{r+1}, \cdots, b'_p$ 取什么样的值，(7.5)都得到满足(注2)。

[注1] 令 $\xi_1, \cdots, \xi_p$ 为实变数，并考虑二次型

$$\begin{aligned}\sum_i\sum_j a_{ij}\xi_i\xi_j&=\sum_i\sum_j\Big(\sum_\alpha x_{\alpha i}x_{\alpha j}\Big)\xi_i\xi_j=\sum_\alpha\Big(\sum_i x_{\alpha i}\xi_i\Big)\Big(\sum_j x_{\alpha j}\xi_j\Big)\\&=\sum_\alpha\Big(\sum_i x_{\alpha i}\xi_i\Big)^2.\end{aligned} \tag{7.7}$$

由于这个式子决不为负，所以矩陣 $[a_{ij}]$ 是半正定的。

[注2] (7.3)意味着新参数的 X 表具有表7.1的形状。这就是說，$\beta'_{r+1}, \cdots, \beta'_p$ 实际上对于数据毫无影响(即为无用参数)。因此，不能从这里的数据得到有关 $\beta'_{r+1}, \cdots, \beta'_p$ 的任何情报，这是当然的。实际上，$b'_{r+1}, \cdots, b'_p$ 为不定值，就是这种事实的反映。

表7.1 新的 X 表

β'_1	$\cdots$	β'_r	β'_{r+1}	$\cdots$	β'_p	数据
x'_{11}	$\cdots$	x'_{1r}	0	$\cdots$	0	y_1
x'_{21}	$\cdots$	x'_{2r}	0	$\cdots$	0	y_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x'_{N1}	$\cdots$	x'_{Nr}	0	$\cdots$	0	y_N

現在，我們来考虑把解表达为正规方程右边的一次式

$$b'_h=\sum_k c'_{hk}B'_k \quad (h=1, \cdots, p). \tag{7.8}$$

于是，由(7.6)推知必須有：

$$c'_{hk} = \delta'_{hk} / \lambda_h \quad (h, k = 1, \cdots, r). \tag{7.9}$$

但是，正如(7.4)所示，所有的 $B'_{r+1}, \cdots, B'_p$ 都等于0，并且 $b'_{r+1}, \cdots, b'_p$ 为不定值，所以其他系数都可以是任意的。这就是說，C 表具有表7.2的形状。在表中，除了明确写进数值的地方以外，其余都是不定的。因此，当由(6.12)回复到原参数組的 C 表的元素时，就会包含由表7.2中的不定元素所引起的不定性。

表 7.2　C 表

$i = $	B'_1	$\cdots$	B'_r	B'_{r+1}	$\cdots$	B'_p
b'_1	$\frac{1}{\lambda_1}$		0	$c_{1,r+1}$	$\cdots$	c_{1p}
$\vdots$		$\ddots$		$\vdots$		$\vdots$
b'_r	0		$\frac{1}{\lambda_r}$	$c_{r,r+1}$	$\cdots$	c_{rp}
b'_{r+1}	$c_{r+1,1}$	$\cdots$	$c_{r+1,r}$	$c_{r+1,r+1}$	$\cdots$	$c_{r+1,p}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
b'_p	c_{p1}	$\cdots$	c_{pr}	$c_{p,r+1}$	$\cdots$	c_{pp}

［注3］当 $r<p$ 时，矩陣 $[c'_{ij}]$ 不是 $[a'_{ij}]$ 的逆矩陣(逆矩陣不存在)。事实上，作乘积便得

$$[a'_{hk}][c'_{kl}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \lambda_r & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 & \times & \cdots & \times \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_r} & \times & \cdots & \times \\ \hline \times & \cdots & \times & \times & \cdots & \times \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \times & \cdots & \times & \times & \cdots & \times \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & \times & \cdots & \times \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \times & \cdots & \times \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right], \tag{7.10}$$

这不是完整的单位矩陣。

其次，討論估計問題。对于估計参数的一次式

$$\theta = l_1\beta_1 + l_2\beta_2 + \cdots + l_p\beta_p, \tag{7.11}$$

利用(6.2)便可以把上式改写成

$$\theta = \sum_i l_i \left(\sum_k p_{ik} \beta'_k\right) = \sum_k \left(\sum_i l_i p_{ik}\right) \beta'_k = \sum_k l'_k \beta'_k, \tag{7.12}$$

就是說，它的系数变成

$$l'_k = \sum_i l_i p_{ik} \quad (k = 1, 2, \cdots, p). \tag{7.13}$$

其中，若 $l'_{r+1}, \cdots, l'_p$ 都等于 0，则

$$\theta = l'_1\beta'_1 + \cdots + l'_r\beta'_r, \tag{7.14}$$

所以利用(7.6)便可求得其最小二乘估計为

$$\hat{\theta} = l'_1b'_1 + \cdots + l'_rb'_r. \tag{7.15}$$

但是，如果 $l'_{r+1}, \cdots, l'_p$ 中有些不等于 0，那末 θ 就不可能用这里的数据来估計。这样，当 $r<p$ 时，在参数的一次式(7.11)中，有的是可估計的，而有的却不能估計。可估計的条件是，当由上述变换而轉变为新的参数时，

$$l'_k = \sum_i l_i p_{ik} = 0 \quad (k = r+1, \cdots, p). \tag{7.16}$$

这就是說，把 $[l_i]$ 放在矩陣 $[x_{\alpha i}]$ 上面而得到的增广矩陣

$$\begin{bmatrix} l_1 & \cdots & l_p \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N1} & \cdots & x_{Np} \end{bmatrix} \tag{7.17}$$

的秩等于 $[x_{\alpha i}]$ 的秩 r（証明从略）。因为满足这种条件的一次式可以变换为(7.14)的形状，所以它可以由(7.15)来估計。而且它的方差是(注 4)

$$V(\hat{\theta}) = \left(\frac{l'^2_1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{l'^2_r}{\lambda_r}\right)\sigma^2. \tag{7.18}$$

［注 4］(7.18)可以理解为 §2 的理論之应用，但是也不难直接証明。例如，从(7.6)推出

$$b'_k = \sum_\alpha x'_{\alpha k} y_\alpha / \lambda_k \quad (k = 1, \cdots, r), \tag{7.19}$$

考虑到(7.1)，便得

$$V(b'_k) = \sum_\alpha x'^2_{\alpha k}\sigma^2/\lambda_k^2 = \sigma^2/\lambda_k \quad (k = 1, \cdots, r) \tag{7.20}$$

和

$$V(b'_h, b'_k) = \sum_\alpha x'_{\alpha h}x'_{\alpha k}\sigma^2/\lambda_h\lambda_k = 0 \quad (h \neq k). \tag{7.21}$$

由此立即推出(7.18)。

最后，殘差平方和的定义式可以变换为

$$S_E=\sum_\alpha(y_\alpha-\sum_i x_{\alpha i}b_i)^2=\sum_\alpha\{y_\alpha-\sum_i x_{\alpha i}(\sum_k p_{ik}b'_k)\}^2$$

$$=\sum_\alpha\{y_\alpha-\sum_k(\sum_i x_{\alpha i}p_{ik})b'_k\}^2=\sum_\alpha(y_\alpha-\sum_k x'_{\alpha k}b'_k)^2. \quad (7.22)$$

利用(1.13)还可以改写成

$$S_E=\sum_\alpha y_\alpha^2-\sum_k b'_k B'_k. \quad (7.23)$$

此外，把(7.6)和(7.4)代入上式，便得

$$S_E=\sum_\alpha y_\alpha^2-\left(\frac{B_1'^2}{\lambda_1}+\cdots+\frac{B_r'^2}{\lambda_r}\right). \quad (7.24)$$

并且它的数学期望是

$$E(S_E)=(N-r)\sigma^2. \quad (7.25)$$

直接的証明

$$E(y_\alpha^2)=V(y_\alpha)+\{E(y_\alpha)\}^2=\sigma^2+(\sum_k x'_{\alpha k}\beta'_k)^2,$$

$$E(B_k'^2)=V(B'_k)+\{E(B'_k)\}^2$$

$$=\sum_\alpha x_{\alpha k}'^2\sigma^2+(\sum_\alpha x'_{\alpha k}\sum_h x'_{\alpha h}\beta'_h)^2$$

$$=\lambda_k\sigma^2+(\sum_h a'_{kh}\beta'_h)^2$$

$$=\lambda_k\sigma^2+(\lambda_k\beta'_k)^2 \quad (k=1,\cdots,r).$$

因此

$$E(S_E)=\sum_\alpha\{\sigma^2+(\sum_k x'_{\alpha k}\beta'_k)^2\}-\sum_{k=1}^{r}(\sigma^2+\lambda_k\beta_k'^2)$$

$$=(N-r)\sigma^2.$$

于是

$$V_E=S_E/(N-r) \quad (7.26)$$

是 σ^2 的无偏估計。必須注意，上式的分母(自由度)不是 $N-p$ 而是 $N-r$. 因为参数的个数"实际上"只有 r 个。

上面对正規方程的系数矩陣是非滿秩的情形，討論了使之变

成形如(7.1)的变换，但在作实际計算的时候，可以不作这种变换，而按照原参数进行計算。这时，与滿秩情形的区别有下列几点：

(1) 正規方程的解是不定的。这是由于上述变换中 $b'_{r+1}, \cdots, b'_p$ 的不定性而引起的。因为这种不定性对"有用的"結果沒有任何影响(注5)，所以只要从正規方程的許多解中取其任意的一組解即可(注6)。

(2) 由正規方程右边所表达的解的式子，其系数 c_{ij}(C 表的元素)不是唯一确定的，这是由于表7.2的不定性而引起的。因为这种不定性对"有用的"結果也沒有任何影响(注5)，所以只要得到一組由右边所表达的解的式子即可(注6)。

(3) 在参数的一次式 $\theta=\sum_i l_i\beta_i$ 中，有的可以用这里的数据来估計，而有的却不能估計。可估計的条件是：(7.17)的秩等于 $[x_{\alpha i}]$ 的秩，即存在 $c_1, \cdots, c_N$ 滿足

$$l_i=\sum_\alpha c_\alpha x_{\alpha i} \quad (i=1, 2, \cdots, p). \tag{7.27}$$

也就是說，存在着 θ 的一个无偏估計(不一定是最优的) $\sum_\alpha c_\alpha y_\alpha$。

(4) 殘差平方和 S_E 的数学期望是(7.25)。

除上列几点以外，§1和§2的公式仍然可以适用于一般情形。

[注5] 如果对原参数組，得到了正規方程的一組解 $b_1, \cdots, b_p$，那末由(6.24)作变换，便得到新参数組的正規方程的解 $b'_1, \cdots, b'_p$。其中 $b'_1, \cdots, b'_r$ 部分必須与(7.6)一致(不管 $b'_{r+1}, \cdots, b'_p$ 是什么)。这时，$\hat{\theta}=\sum_i l_ib_i$ 可以变换为

$$\hat{\theta}=\sum_i l_ib_i=\sum_i l_i(\sum_k p_{ik}b'_k)=\sum_k l'_kb'_k, \tag{7.28}$$

但若 θ 是可估計的，則必須有 $l'_{r+1}=\cdots=l'_p=0$，因此，上式与(7.15)一致。即使利用另外的解来代替 $b_1, \cdots, b_p$，但因只有 $b'_{r+1}, \cdots, b'_p$ 发生变化，而 $b'_1, \cdots, b'_r$ 不变，所以对可估計的 θ 来說，(7.28)的值仍然是相同的。

如果对原参数組，得到了一組由正規方程右边所表达的解式

$$b_i=\sum_j c_{ij}B_j \quad (i=1, \cdots, p), \tag{7.29}$$

那末由(6.24)和(6.25)作变换，并利用(6.23)便有

$$b'_k=\sum_h c'_{kh}B'_h \quad (k=1, \cdots, p), \tag{7.30}$$

于是对变换后的参数組，得到一組由正規方程右边所表达的解式。其系数的表应該具有表 7.2 的形状。这样，$\sum_i\sum_j c_{ij}l_il_j$ 就可变换为

$$\sum_i\sum_j c_{ij}l_il_j=\sum_i\sum_j\left(\sum_h\sum_k p_{ih}p_{jk}c'_{hk}\right)l_il_j=\sum_h\sum_k c'_{hk}l'_hl'_k. \tag{7.31}$$

但若有可估計的条件 $l'_{r+1}=\cdots=l'_p=0$，則表 7.2 中的不定部分消掉，而(7.31)則变成 $l_1'^2/\lambda_1+\cdots+l_r'^2/\lambda_r$. 因此，由(7.18)推出

$$V(\hat{\theta})=\sum_i\sum_j c_{ij}l_il_j\sigma^2. \tag{7.32}$$

即使利用了另一个 C 表，但因变换后的 c'_{hk} 对 $h, k=1, \cdots, r$ 这一部分不会有任何变化，所以(7.31)的值仍然相同(对可估計的 $\sum_i l_i\beta_i$ 来說)。

当用任意一組解 $b_1, \cdots, b_p$ 来計算 $\sum_i b_iB_i$ 时，可以把它变换为

$$\sum_i b_iB_i=\sum_i\left(\sum_k p_{ik}b'_k\right)B_i=\sum_k b'_k\left(\sum_i B_ip_{ik}\right)=\sum_k b'_kB'_k. \tag{7.33}$$

但若利用(7.6)和(7.4)，則(7.33)变成 $B_1'^2/\lambda_1+\cdots+B_r'^2/\lambda_r$. 即使利用了另外的解，但因只有 $b'_{r+1}, \cdots, b'_p$ 发生变化，而且相应的 $B'_{r+1}, \cdots, B'_p$ 都为 0，所以(7.33)的值仍然相同。这样，对殘差平方和的計算公式

$$S_E=\sum_a y_a^2-\sum_i b_iB_i, \tag{7.34}$$

无論用什么样的解 $b_1, \cdots, b_p$，其結果都是相同的。

［注 6］ 在上面已經看到，即使正規方程的解很多，但我們只要求出其中一組就够了。因此，对正規方程的求解可以加上$(p-r)$个互不矛盾的条件来求。若能巧妙地选擇这些附加条件，則解往往具有簡单的形状。但是附加条件对"有用的"結果沒有任何影响，而且对其在物理上是否有意义也可以不加考虑。Bose [6]主要就是用这种观点来处理統計分析的。

§8 例　　題

我們将在本节討論二因子設計和不完全区組設計的分析，作为上节所述理論的例子。

例 1 二因子設計　設数据有 $N=12$ 个，其构造是

$$y_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\varepsilon_{ij} \quad (i=1, 2, 3;\ j=1, 2, 3, 4). \tag{8.1}$$

也就是說，X 表如表 8.1 所示(表中的空栏是 0)。

表 8.1 X表

μ	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3	β_4	数据
1	1			1				y_{11}
1	1				1			y_{12}
1	1					1		y_{13}
1	1						1	y_{14}
1		1		1				y_{21}
1		1			1			y_{22}
1		1				1		y_{23}
1		1					1	y_{24}
1			1	1				y_{31}
1			1		1			y_{32}
1			1			1		y_{33}
1			1				1	y_{34}

表 8.2 A表

m	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	b_4	$=1$
12	4	4	4	3	3	3	3	G
4	4			1	1	1	1	A_1
4		4		1	1	1	1	A_2
4			4	1	1	1	1	A_3
3	1	1	1	3				B_1
3	1	1	1		3			B_2
3	1	1	1			3		B_3
3	1	1	1				3	B_4

参数是 μ, α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, β_4 这 8 个 $(p=8)$。决定参数估計量 m, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4 的正規方程如表 8.2 所示。表中的空栏是 0，其右边为

$$\left.\begin{aligned} G&=\sum_i\sum_j y_{ij}, \\ A_i&=\sum_j y_{ij} \quad (i=1, 2, 3), \\ B_j&=\sum_i y_{ij} \quad (j=1, 2, 3, 4). \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

但是，表 8.2 的主要部分的矩陣不是滿秩的，这可由第二、第三、第四这三行的和等于第一行立刻看出。另外，由于下面四行的和也等于第一行，因此可以想象，秩 r 至少比 p 低 2.

在正規方程的系数矩陣是非滿秩的情形，如上节所述，有两种处理方法。一种是变换参数組，使无用参数分离出去；另一种是任意添加条件来求解。

首先，按照第一种方法来討論。为此，要依下式把 α_1、α_2，α_3 变换为 $\dot{\alpha}_0$，$\dot{\alpha}_1$，$\dot{\alpha}_2$:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\frac{1}{\sqrt{3}}\dot{\alpha}_0+\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\alpha}_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\dot{\alpha}_2,\\ \alpha_2&=\frac{1}{\sqrt{3}}\dot{\alpha}_0-\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\alpha}_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\dot{\alpha}_2,\\ \alpha_3&=\frac{1}{\sqrt{3}}\dot{\alpha}_0\qquad\qquad-\frac{2}{\sqrt{6}}\dot{\alpha}_2.\end{aligned}\right\}\tag{8.3}$$

又依下式把 β_1, β_2, β_3, β_4 变换为 $\dot{\beta}_0$, $\dot{\beta}_1$, $\dot{\beta}_2$, $\dot{\beta}_3$:

$$\left.\begin{aligned}\beta_1&=\frac{1}{\sqrt{4}}\dot{\beta}_0+\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\beta}_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\dot{\beta}_2+\frac{1}{\sqrt{12}}\dot{\beta}_3,\\ \beta_2&=\frac{1}{\sqrt{4}}\dot{\beta}_0-\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\beta}_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\dot{\beta}_2+\frac{1}{\sqrt{12}}\dot{\beta}_3,\\ \beta_3&=\frac{1}{\sqrt{4}}\dot{\beta}_0\qquad\qquad-\frac{2}{\sqrt{6}}\dot{\beta}_2+\frac{1}{\sqrt{12}}\dot{\beta}_3,\\ \beta_4&=\frac{1}{\sqrt{4}}\dot{\beta}_0\qquad\qquad\qquad\qquad-\frac{3}{\sqrt{12}}\dot{\beta}_3.\end{aligned}\right\}\tag{8.4}$$

[注]　(8.3) 和 (8.4) 的变換矩陣是正交矩陣。我們可以作出任何阶的这种形状的正交矩陣。令阶数为 n，于是第一列排成 $1/\sqrt{n}$ 的纵列。一般第 k 列 ($k\geqslant 2$) 的排法是：先排 $(k-1)$ 个 $1/\sqrt{k(k-1)}$，接着排 $-(k-1)/\sqrt{k(k-1)}$，其余全排 0.

令

$$\mu=\dot{\mu}-\frac{1}{\sqrt{3}}\dot{\alpha}_0-\frac{1}{\sqrt{4}}\dot{\beta}_0.\tag{8.5}$$

于是我們就可以取表 8.3 作为 §6 和 §7 所述的一般理論中的矩陣 $[p_{ik}]$。

这样，变换后的 X 表就变为表 8.4。

由此看出，在新的参数組中 $\dot{\alpha}_0$ 和 $\dot{\beta}_0$（起碼就这里的 12 个数据而言）是无用的，而有效的恰好是 $\dot{\mu}$, $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\alpha}_2$, $\dot{\beta}_1$, $\dot{\beta}_2$ 和 $\dot{\beta}_3$ 这 6 个。

現在，由 X 表的正交性可知，作为决定这些参数估計量 $\dot{m}$,

表 8.3 变换的矩阵

1 =	$\dot{\mu}$	$\dot{\alpha}_0$	$\dot{\alpha}_1$	$\dot{\alpha}_2$	$\dot{\beta}_0$	$\dot{\beta}_1$	$\dot{\beta}_2$	$\dot{\beta}_3$
μ	1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$			$\frac{-1}{\sqrt{4}}$			
α_1		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$				
α_2		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$				
α_3		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{-2}{\sqrt{6}}$				
β_1					$\frac{1}{\sqrt{4}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{12}}$
β_2					$\frac{1}{\sqrt{4}}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{12}}$
β_3					$\frac{1}{\sqrt{4}}$	0	$\frac{-2}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{12}}$
β_4					$\frac{1}{\sqrt{4}}$	0	0	$\frac{-3}{\sqrt{12}}$

表 8.4 新的 X 表

$\dot{\mu}$	$\dot{\alpha}_0$	$\dot{\alpha}_1$	$\dot{\alpha}_2$	$\dot{\beta}_0$	$\dot{\beta}_1$	$\dot{\beta}_2$	$\dot{\beta}_3$	数据
1	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{6}$	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{12}$	y_{11}
1	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{6}$	0	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{12}$	y_{12}
1	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{6}$	0	0	$-2/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{12}$	y_{13}
1	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{6}$	0	0	0	$-3/\sqrt{12}$	y_{14}
1	0	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{6}$	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{12}$	y_{21}
1	0	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{6}$	0	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{12}$	y_{22}
1	0	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{6}$	0	0	$-2/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{12}$	y_{23}
1	0	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{6}$	0	0	0	$-3/\sqrt{12}$	y_{24}
1	0	0	$-2/\sqrt{6}$	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{12}$	y_{31}
1	0	0	$-2/\sqrt{6}$	0	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{12}$	y_{32}
1	0	0	$-2/\sqrt{6}$	0	0	$-2/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{12}$	y_{33}
1	0	0	$-2/\sqrt{6}$	0	0	0	$-3/\sqrt{12}$	y_{31}

$\dot{a}_1$, $\dot{a}_2$, $\dot{b}_1$, $\dot{b}_2$, $\dot{b}_3$ 的正規方程，可以取下列的簡单形状：

$$\left.\begin{aligned}
12\dot{m} &= y_{11}+y_{12}+y_{13}+y_{14}+y_{21}+y_{22}+y_{23}+y_{24} \\
&\quad +y_{31}+y_{32}+y_{33}+y_{34}, \\
4\dot{a}_1 &= \frac{y_{11}+y_{12}+y_{13}+y_{14}}{\sqrt{2}}-\frac{y_{21}+y_{22}+y_{23}+y_{24}}{\sqrt{2}}, \\
4\dot{a}_2 &= \frac{y_{11}+y_{12}+y_{13}+y_{14}}{\sqrt{6}}+\frac{y_{21}+y_{22}+y_{23}+y_{24}}{\sqrt{6}} \\
&\quad -2\frac{y_{31}+y_{32}+y_{33}+y_{34}}{\sqrt{6}}, \\
3\dot{b}_1 &= \frac{y_{11}-y_{12}}{\sqrt{2}}+\frac{y_{21}-y_{22}}{\sqrt{2}}+\frac{y_{31}-y_{32}}{\sqrt{2}}, \\
3\dot{b}_2 &= \frac{y_{11}+y_{12}-2y_{13}}{\sqrt{6}}+\frac{y_{21}+y_{22}-2y_{23}}{\sqrt{6}} \\
&\quad +\frac{y_{31}+y_{32}-2y_{33}}{\sqrt{6}}, \\
3\dot{b}_3 &= \frac{y_{11}+y_{12}+y_{13}-3y_{14}}{\sqrt{12}}+\frac{y_{21}+y_{22}+y_{23}-3y_{24}}{\sqrt{12}} \\
&\quad +\frac{y_{31}+y_{32}+y_{33}-3y_{34}}{\sqrt{12}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.6)$$

这相当于一般理論中的(7.5)。再用(8.2)来表达，便得

$$\left.\begin{aligned}
12\dot{m} &= G, \\
4\dot{a}_1 &= (A_1-A_2)/\sqrt{2}, \\
4\dot{a}_2 &= (A_1+A_2-2A_3)/\sqrt{6}, \\
3\dot{b}_1 &= (B_1-B_2)/\sqrt{2}, \\
3\dot{b}_2 &= (B_1+B_2-2B_3)/\sqrt{6}, \\
3\dot{b}_3 &= (B_1+B_2+B_3-3B_4)/\sqrt{12}.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.7)$$

由此可以确定 $\dot{m}$, $\dot{a}_1$, $\dot{a}_2$, $\dot{b}_1$, $\dot{b}_2$, $\dot{b}_3$. 而且它們的方差是:

$$V(\dot{m})=\sigma^2/12,\ V(\dot{a}_i)=\sigma^2/4,\ V(\dot{b}_j)=\sigma^2/3.$$

α_0, β_0 的估計量 $\dot{a}_0$, $\dot{b}_0$ 当然是不定的。

欲利用上述的結果来求原参数組的估計量，只需把它們代入与(8.3)，(8.4)，(8.5)相类似的式子即可。也就是

$$
\left.\begin{aligned}
m&=\dot{m}-\frac{1}{\sqrt{3}}\dot{a}_0-\frac{1}{\sqrt{4}}\dot{b}_0=\frac{G}{12}-\frac{\dot{a}_0}{\sqrt{3}}-\frac{\dot{b}_0}{\sqrt{4}},\\
a_1&=\frac{1}{\sqrt{3}}\dot{a}_0+\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{a}_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\dot{a}_2=\frac{A_1}{4}-\frac{G}{12}+\frac{\dot{a}_0}{\sqrt{3}},\\
a_2&=\frac{1}{\sqrt{3}}\dot{a}_0-\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{a}_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\dot{a}_2=\frac{A_2}{4}-\frac{G}{12}+\frac{\dot{a}_0}{\sqrt{3}},\\
a_3&=\frac{1}{\sqrt{3}}\dot{a}_0\qquad\qquad-\frac{2}{\sqrt{6}}\dot{a}_2=\frac{A_3}{4}-\frac{G}{12}+\frac{\dot{a}_0}{\sqrt{3}},\\
b_1&=\frac{1}{\sqrt{4}}\dot{b}_0+\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{b}_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\dot{b}_2+\frac{1}{\sqrt{12}}\dot{b}_3\\
&=\frac{B_1}{3}-\frac{G}{12}+\frac{\dot{b}_0}{\sqrt{4}},\\
b_2&=\frac{1}{\sqrt{4}}\dot{b}_0-\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{b}_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\dot{b}_2+\frac{1}{\sqrt{12}}\dot{b}_3\\
&=\frac{B_2}{3}-\frac{G}{12}+\frac{\dot{b}_0}{\sqrt{4}},\\
b_3&=\frac{1}{\sqrt{4}}\dot{b}_0\qquad\qquad-\frac{2}{\sqrt{6}}\dot{b}_2+\frac{1}{\sqrt{12}}\dot{b}_3\\
&=\frac{B_3}{3}-\frac{G}{12}+\frac{\dot{b}_0}{\sqrt{4}},\\
b_4&=\frac{1}{\sqrt{4}}\dot{b}_0\qquad\qquad\qquad\qquad-\frac{3}{\sqrt{12}}\dot{b}_3\\
&=\frac{B_4}{3}-\frac{G}{12}+\frac{\dot{b}_0}{\sqrt{4}}.
\end{aligned}\right\}\tag{8.8}
$$

其中，由于 $\dot{a}_0$，$\dot{b}_0$ 是不定的，因而带来了不定性。

欲使参数的一次式

$$
\begin{aligned}
\theta=l_0\mu&+l_{11}\alpha_1+l_{12}\alpha_2+l_{13}\alpha_3\\
&+l_{21}\beta_1+l_{22}\beta_2+l_{23}\beta_3+l_{24}\beta_4
\end{aligned}\tag{8.9}
$$

是可估計的，在变換后的式子

$$
\begin{aligned}
\theta = & l_0\left(\dot{\mu}-\frac{1}{\sqrt{3}}\dot{\alpha}_0-\frac{1}{\sqrt{4}}\dot{\beta}_0\right)+l_{11}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\dot{\alpha}_0+\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\alpha}_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\dot{\alpha}_2\right)\\
& +l_{12}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\dot{\alpha}_0-\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\alpha}_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\dot{\alpha}_2\right)+l_{13}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\dot{\alpha}_0-\frac{2}{\sqrt{6}}\dot{\alpha}_2\right)\\
& +l_{21}\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\dot{\beta}_0+\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\beta}_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\dot{\beta}_2+\frac{1}{\sqrt{12}}\dot{\beta}_3\right)+\cdots\\
= & l_0\dot{\mu}+\frac{l_{11}-l_{12}}{\sqrt{2}}\dot{\alpha}_1+\frac{l_{11}+l_{12}-2l_{13}}{\sqrt{6}}\dot{\alpha}_2+\frac{l_{21}-l_{22}}{\sqrt{2}}\dot{\beta}_1\\
& +\frac{l_{21}+l_{22}-2l_{23}}{\sqrt{6}}\dot{\beta}_2+\frac{l_{21}+l_{22}+l_{23}-3l_{24}}{\sqrt{12}}\dot{\beta}_3\\
& +\left(-\frac{l_0}{\sqrt{3}}+\frac{l_{11}+l_{12}+l_{13}}{\sqrt{3}}\right)\dot{\alpha}_0\\
& +\left(-\frac{l_0}{\sqrt{4}}+\frac{l_{21}+l_{22}+l_{23}+l_{24}}{\sqrt{4}}\right)\dot{\beta}_0
\end{aligned}
\tag{8.10}
$$

中，必須令 $\dot{\alpha}_0$ 和 $\dot{\beta}_0$ 的系数等于 0. 也就是說，必須有

$$
l_0=l_{11}+l_{12}+l_{13}=l_{21}+l_{22}+l_{23}+l_{24}. \tag{8.11}
$$

例如，参数的一次式

$$
\theta_1=\mu+\alpha_1+\beta_1,\ \theta_2=\alpha_2-\alpha_3,\ \theta_3=\beta_2+\beta_3-2\beta_4 \tag{8.12}
$$

都滿足条件(8.11)，所以它們是可估計的。事实上，它們可以分別变换为

$$
\theta_1=\dot{\mu}+\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\alpha}_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\dot{\alpha}_2+\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\beta}_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\dot{\beta}_2+\frac{1}{\sqrt{12}}\dot{\beta}_3, \tag{8.13}
$$

$$
\theta_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\alpha}_1+\frac{3}{\sqrt{6}}\dot{\alpha}_2, \tag{8.14}
$$

$$
\theta_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\beta}_1-\frac{1}{\sqrt{6}}\dot{\beta}_2+\frac{8}{\sqrt{12}}\dot{\beta}_3. \tag{8.15}
$$

所以估計量分别是

$$
\hat{\theta}_1=\dot{m}+\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{a}_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\dot{a}_2+\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{b}_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\dot{b}_2+\frac{1}{\sqrt{12}}\dot{b}_3, \tag{8.16}
$$

$$
\hat{\theta}_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{a}_1+\frac{3}{\sqrt{6}}\dot{a}_2, \tag{8.17}
$$

$$
\hat{\theta}_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{b}_1-\frac{1}{\sqrt{6}}\dot{b}_2+\frac{8}{\sqrt{12}}\dot{b}_3. \tag{8.18}
$$

它們的方差分别是❶

$$V(\hat{\theta}_1)=\left\{\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)\frac{1}{3}\right\}\sigma^2=\frac{6}{12}\sigma^2=\frac{1}{2}\sigma^2, \quad (8.19)$$

$$V(\hat{\theta}_2)=\left(\frac{1}{2}+\frac{9}{6}\right)\frac{\sigma^2}{4}=\frac{2}{4}\sigma^2=\frac{1}{2}\sigma^2, \quad (8.20)$$

$$V(\hat{\theta}_3)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{64}{12}\right)\frac{\sigma^2}{3}=\frac{6}{3}\sigma^2=2\sigma^2. \quad (8.21)$$

利用一般式(7.24),再从(8.7)便可求得殘差平方和的計算公式

$$S_E=\sum_i\sum_j y_{ij}^2-\left\{\frac{G^2}{12}+\frac{(A_1-A_2)^2}{8}+\frac{(A_1+A_2-2A_3)^2}{24}+\frac{(B_1-B_2)^2}{6}+\frac{(B_1+B_2-2B_3)^2}{18}+\frac{(B_1-B_2+B_3-3B_4)^2}{36}\right\}. \quad (8.22)$$

以自由度 $N-r=12-6=6$ 来除上式,便得到 σ^2 的无偏估計。

現在,如果按照第二种方法,也就是利用原参数組来討論,那末将得出什么样的結果呢? 这时,我們可以給正規方程(表 8.2)加上二个任意的条件,然后求解。設这些附加条件为

$$\left.\begin{array}{l} a_1+a_2+a_3=0, \\ b_1+b_2+b_3+b_4=0, \end{array}\right\} \quad (8.23)$$

求解就很方便。这样一来,表 8.2 的主要部分就差不多与对角矩陣相同,其解可确定为

$$m=\frac{G}{12},\ a_i=\frac{A_i}{4}-\frac{G}{12} \quad (i=1, 2, 3),$$

$$b_j=\frac{B_j}{3}-\frac{G}{12} \quad (j=1, 2, 3, 4). \quad (8.24)$$

上式相当于在(8.8)中令 $\bar{a}_0=\bar{b}_0=0$ 的式子。若把它們列成 C 表的形状,則得表 8.5。

因为上列(8.12)的 θ_1, θ_2 和 θ_3 分别具有 y_{11}, $y_{21}-y_{31}$ 和

❶ (8.16)～(8.21)的一般公式可参看§13的(13.18)和(13.19)。

表8.5 C表

1 =	G	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	B_4
m	$\frac{1}{12}$							
a_1	$\frac{-1}{12}$	$\frac{1}{4}$						
a_2	$\frac{-1}{12}$		$\frac{1}{4}$					
a_3	$\frac{-1}{12}$			$\frac{1}{4}$				
b_1	$\frac{-1}{12}$				$\frac{1}{3}$			
b_2	$\frac{-1}{12}$					$\frac{1}{3}$		
b_3	$\frac{-1}{12}$						$\frac{1}{3}$	
b_4	$\frac{-1}{12}$							$\frac{1}{3}$

$y_{12}+y_{13}-2y_{14}$ 这样的无偏估計，所以它們是可估計的。但是，它們不是最优的无偏估計。最优的无偏估計分别由

$$\hat{\theta}_1=m+a_1+b_1=\frac{A_1}{4}+\frac{B_1}{3}-\frac{G}{12}, \tag{8.25}$$

$$\hat{\theta}_2=a_2-a_3=\frac{A_2-A_3}{4}, \tag{8.26}$$

$$\hat{\theta}_3=b_2+b_3-2b_4=\frac{B_2+B_3-2B_4}{3} \tag{8.27}$$

給出。应用表 8.5 于(7.32)，便可算出它們的方差为

$$V(\hat{\theta}_1)=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{-1}{12}+\frac{-1}{12}\right)\sigma^2$$

$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right)\sigma^2=\frac{6}{12}\sigma^2=\frac{1}{2}\sigma^2, \tag{8.28}$$

$$V(\hat{\theta}_2)=\left\{\frac{1^2}{4}+\frac{(-1)^2}{4}\right\}\sigma^2=\frac{2}{4}\sigma^2=\frac{1}{2}\sigma^2, \tag{8.29}$$

$$V(\hat{\theta}_3)=\left\{\frac{1^2}{3}+\frac{1^2}{3}+\frac{(-2)^2}{3}\right\}\sigma^2=\frac{6}{3}\sigma^2=2\sigma^2. \tag{8.30}$$

容易看出，这些結果与上列的(8.16)～(8.21)一致。

由(7.34)可以求得殘差平方和的計算公式为

$$S_E=\sum_i\sum_j y_{ij}^2-\left(mG+\sum_i a_iA_i+\sum_j b_jB_j\right)$$

$$=\sum_i\sum_j y_{ij}^2-\left\{\frac{G^2}{12}+\sum_i A_i\left(\frac{A_i}{4}-\frac{G}{12}\right)+\sum_j B_j\left(\frac{B_j}{3}-\frac{G}{12}\right)\right\}$$

$$=\sum_i\sum_j y_{ij}^2-\left(\sum_i\frac{A_i^2}{4}+\sum_j\frac{B_j^2}{3}-\frac{G^2}{12}\right). \tag{8.31}$$

以 $N-r=12-6=6$ 来除上式，便得 σ^2 的无偏估計（因为給正規方程加上了两个条件才确定了解，所以 $r=p-2=8-2=6$）。容易檢証，(8.31)与(8.22)一致。

［注］　这里，我們用例子說明了无用参数存在时的两种处理方法。一般可以这样說：第一种方法适合于理論上的考察，而第二种方法則适合于实际的計算。但是，例如用穿孔卡片机作計算时，第一种方法有时反而显得方便，所以不能一概地作出上面的結論（但这时最好还是取(8.3)和(8.4)的一切系数的分母为1比較好）。

例2　不完全区組設計❶　設数据的构造与(8.1)相同，但不对所有 (i, j) 的組合都作試驗，例如只对表8.6中記有"1"的那些 (i, j) 的組合作試驗。一般，可以定义

$$n_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当}(i, j)\text{的組合被試驗时},\\ 0, & \text{当}(i, j)\text{的組合不被試驗时}。\end{cases} \tag{8.32}$$

令 $\beta_i(i=1, \cdots, b)$ 表示区組效应，$\tau_j(j=1, \cdots, v)$ 表示处理效应，并記数据的构造为

$$y_{ij}=\mu+\beta_i+\tau_j+e_{ij}. \tag{8.33}$$

这时令 μ，β_i 和 τ_j 的估計值分别为 m，b_i 和 t_j，于是可以形式地把殘差平方和写成下列形状：

表8.6　n_{ij} 表

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	1	1	1	0	0
2	0	1	1	1	0
3	0	0	1	1	1
4	1	0	0	1	1
5	1	1	0	0	1
6	1	1	0	1	0
7	0	1	1	0	1
8	1	0	1	1	0
9	0	1	0	1	1
10	[illegible]	0	1	0	1

❶ 由于每一区組不包含所有的处理，所以叫做不完全(incomplete)。如这个例子那样，重复数 r，区組的大小 k 和每两个处理同时出現的次数 λ 都不依赖于足碼，而为一定的，叫做平衡(balanced)。也就是，这是一个平衡不完全区組設計(balanced incomplete block design)。关于这种設計，可参看 Bose [6]，Mann [8]，Kempthorne [9]和增山[22]，[31]。——譯者注

$$S_E=\sum_i\sum_j n_{ij}(y_{ij}-m-b_i-t_j)^2. \tag{8.34}$$

由此推导正规方程，便得

$$\left.\begin{aligned}&Nm+\sum_i k_ib_i+\sum_j r_jt_j=G,\\&k_im+k_ib_i+\sum_j n_{ij}t_j=B_i,\\&r_jm+\sum_i n_{ij}b_i+r_jt_j=T_j,\end{aligned}\right\} \tag{8.35}$$

此处 $N=\sum_i\sum_j n_{ij}$ 是数据的总数，$k_i=\sum_j n_{ij}$ 是区組 i 的大小，$r_j=\sum_i n_{ij}$ 是处理 j 的重复数，$G=\sum_i\sum_j n_{ij}y_{ij}$ 是数据的总和，$B_i=\sum_j n_{ij}y_{ij}$ 是区組 i 的总和，$T_j=\sum_i n_{ij}y_{ij}$ 是处理 j 的总和。

为了从 (8.35) 的第三式消去 $b_i(i=1,\cdots,b)$，我們从它减掉第二式的 n_{ij}/k_i 倍，便得到

$$\sum_{j'}(\delta_{j'j}r_j-\sum_i n_{ij}n_{ij'}/k_i)t_{j'}=T_j-\sum_i B_in_{ij}/k_i. \tag{8.36}$$

如表 8.6 那样，若那是平衡的設計，則有 $k_i=k$（一定），$r_j=r$（一定），以及两个不同的处理 j 和 j' 在同一个区組內直接比較的次数 $\lambda_{jj'}=\sum_i n_{ij}n_{ij'}=\lambda$（一定）。并且 $\sum_i(n_{ij})^2=\sum_i n_{ij}=r_j=r$，这样，若把 (8.36) 的右边（調整后的处理总和）記为 Q_j，則 (8.36) 变成

$$\left(r-\frac{r}{k}\right)t_j-\frac{\lambda}{k}\sum_{j'\neq j}t_{j'}=Q_j\left(\equiv T_j-\sum_i B_in_{ij}/k\right). \tag{8.37}$$

若取 $\sum_j t_j=0$ 为“任意的附加条件”，則上式变成

$$\left(r-\frac{r}{k}+\frac{\lambda}{k}\right)t_j=Q_j. \tag{8.38}$$

但是，一般有关系式 $r(k-1)=\lambda(v-1)$（某个处理 j 出現 r 次，每次与它直接比較的其他处理有 $(k-1)$ 个，所以总共比較 $r(k-1)$ 次，另一方面，除 j 以外的 $(v-1)$ 个处理分別与 j 直接比較 λ 次，所以总共应等于 $\lambda(v-1)$ 次）。于是 (8.38) 又变成 $(\lambda v/k)t_j=Q_j$。因此，解是

$$t_j = \frac{k}{\lambda v} Q_j. \tag{8.39}$$

若再加上附加条件 $\sum_i b_i = 0$，则从(8.35)的第一式得出 $m = G/N$，因此由(8.35)的第二式可以求得

$$b_i = \frac{1}{k}\Big(B_i - \frac{k}{\lambda v}\sum_j n_{ij} Q_j\Big) - \frac{G}{N}. \tag{8.40}$$

处理 j 和 j' 的效应差 $\tau_j - \tau_{j'}$ 的估計值由

$$t_j - t_{j'} = (Q_j - Q_{j'})k/\lambda v$$

給出，它的方差是 $2\sigma^2 k/\lambda v$。

殘差平方和由

$$\begin{aligned} S_E &= \sum_{i,j} n_{ij} y_{ij}^2 - (mG + \sum_i b_i B_i + \sum_j t_j T_j) \\ &= \sum_{i,j} n_{ij} y_{ij}^2 - \Big\{\frac{G^2}{N} + \Big(\frac{\sum_i B_i^2}{k} - \frac{G^2}{N}\Big) + \frac{k}{\lambda v}\sum_j Q_j^2\Big\} \end{aligned} \tag{8.41}$$

給出，它的自由度是

$$\phi_E = N - b - v + 1.$$

[注 1] 若在完全区組中重复 r 次，则 $\tau_j - \tau_{j'}$ 的估計量的方差应为 $2\sigma^2/r$。上面以 $2\sigma^2 k/\lambda v$ 代替了它。这意味着"有效的重复数"减少为 $\lambda v/k$。例如在表 8.6 中，$r=6$，而 $\lambda v/k = 3\times 5/3 = 5$。一般 $E = \lambda v/kr$ 叫做效率因子。

[注 2] 这里引进的分析方法，只是利用所謂"区組内变化"的方法。若 $b > v$，則从"区組間变化"也可以得到有关 $\tau_j - \tau_{j'}$ 的情报。区組間情报的利用方法可以从类似 §20 的观点导出，但是这样作更加麻煩❶。

§9 几何解釋❷

为了用几何观点来解释最小二乘法的計算，我們考虑 N 維矢量空間，并把 X 表中的各列分别表示为一个矢量。也就是說，在

---

❶ 关于区組間情报的利用，可参看 Cochran-Cox [4] 和 Scheffé [28]。——譯者注

❷ Scheffé[28] 有更詳細的討論。——譯者注

数据的构造式

$$y_\alpha=\sum_i x_{\alpha i}\beta_i+e_\alpha \quad (\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{9.1}$$

中，分别把

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{N1} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{N2} \end{bmatrix},\ \cdots,\ \begin{bmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ \vdots \\ x_{Np} \end{bmatrix} \tag{9.2}$$

表示为一个矢量（图 9.1）。下面为了簡便起見，我們把它們記作 $[y_\alpha]$，$[x_{\alpha 1}]$，$[x_{\alpha 2}]$，$\cdots$，$[x_{\alpha p}]$。

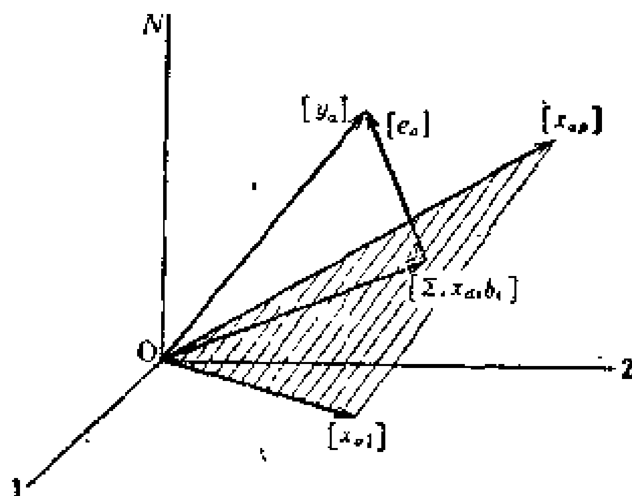


图 9.1　最小二乘估計

这时，对于参数 $\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_p$ 的任意估計值 $b_1, b_2, \cdots, b_p$，“估計矢量”$[\sum_i x_{\alpha i}b_i]=\sum_i b_i[x_{\alpha i}]$ 属于 p 个矢量 $[x_{\alpha 1}]$，$[x_{\alpha 2}]$，$\cdots$，$[x_{\alpha p}]$所張成的空間（“估計空間”）。“数据矢量” $[y_\alpha]$ 可以分解为估計矢量 $[\sum_i x_{\alpha i}b_i]$ 和“殘差矢量” $[e_\alpha]$（参看 (1.4)），而对最小二乘估計，特别有下列关系（参看(1.7)）：

$$\sum_\alpha x_{\alpha i}e_\alpha=0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ p). \tag{9.3}$$

这就是說，殘差矢量 $[e_\alpha]$ 与 p 个矢量 $[x_{\alpha i}]$ $(i=1,\ \cdots,\ p)$ 的每一个都垂直，从而也与估計空間垂直。因此，我們可以这样說，“在最小

二乘法中，数据矢量可以分解为属于估計空間的矢量（估計矢量）以及与后者垂直的矢量（殘差矢量）”。換句話說，“估計矢量是数据矢量在估計空間的正射影”。

［注］ 数据矢量 $[y_\alpha]$ 的长度是 $(\sum_\alpha y_\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$，估計矢量 $[\sum_i x_{\alpha i}b_i]$ 的长度是 $(\sum_\alpha\sum_i\sum_j x_{\alpha i}x_{\alpha j}b_ib_j)^{\frac{1}{2}}=(\sum_i\sum_j a_{ij}b_ib_j)^{\frac{1}{2}}$，殘差矢量 $[e_\alpha]$ 的长度是 $(\sum_\alpha e_\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$，并在三者之間成立着 Pythagoras 定理，即

$$\sum_\alpha y_\alpha^2=\sum_i\sum_j a_{ij}b_ib_j+\sum_\alpha e_\alpha^2. \tag{9.4}$$

这就是(1.13)的几何意义。

§6 所討論的变换，若按照本节的解釋，那就是“估計空間”的基的变换。也就是說，那里討論了以滿秩矩陣 $[p_{ik}]$ 为系数的变换

$$\left.\begin{array}{l}[x'_{\alpha 1}]=[x_{\alpha 1}]p_{11}+[x_{\alpha 2}]p_{21}+\cdots+[x_{\alpha p}]p_{p1},\\ \quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\ [x'_{\alpha p}]=[x_{\alpha 1}]p_{1p}+[x_{\alpha 2}]p_{2p}+\cdots+[x_{\alpha p}]p_{pp},\end{array}\right\} \tag{9.5}$$

从而得到了变换后的新基 $[x'_{\alpha 1}],\cdots,[x'_{\alpha p}]$。这时，同一“估計矢量”，对原基可用系数 $b_1,\cdots,b_p$ 来表达，而对新基则用系数 $b'_1,\cdots,b'_p$ 来表达。正規方程的系数矩陣 $[a_{ij}]$ 是关于“斜交軸”$[x_{\alpha 1}],\cdots,[x_{\alpha p}]$ 的变元張量（上列的(9.4)也显出这一点），所以它遵循張量的变换法則(6.6)。

在存在着无用参数的情形（§7），估計空間的維数 r 低于 p。因此，利用适当的变换，实际上可以用 r 个矢量 $[x'_{\alpha 1}],\cdots,[x'_{\alpha r}]$ 作为基来表示。这样，虽然名义上加入了 $(p-r)$ 个零矢量 $[x'_{\alpha,r+1}],\cdots,[x'_{\alpha p}]$，以使矢量的个数与 p 一致，但由于这些零矢量的系数 $b'_{r+1},\cdots,b'_p$ 实际上不起任何作用，所以在估計矢量的表現中也仅有相应的不定性。

用綫性变换把正規方程的系数矩陣变换为对角型（参看(7.1)）的作法，相当于在估計空間中引进直角坐标系。这样的“正交化”

不但有效地应用于存在无用参数情形的理論，而且对其他的許多情形也是有用的。

例(标准正交化)　要使根据变换

$$
\left.\begin{aligned}
&[x_{\alpha1}]=[u_{\alpha1}]s_1,\\
&[x_{\alpha2}]=[u_{\alpha1}]g_{12}+[u_{\alpha2}]s_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[x_{\alpha p}]=[u_{\alpha1}]g_{1p}+[u_{\alpha2}]g_{2p}+\cdots+[u_{\alpha p}]s_p
\end{aligned}\right\}\qquad(9.6)
$$

所引进的新基满足标准化正交性

$$
\sum_{\alpha}u_{\alpha i}u_{\alpha j}=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j),\\ 0 & (i\neq j),\end{cases}\qquad(9.7)
$$

那么应如何决定系数才好呢？

若通过(9.6)和(9.7)，用变换的系数来表达原正規方程的系数 a_{ij}，则得

$$
\left.\begin{aligned}
&a_{11}=s_1^2,\\
&\quad a_{1j}=s_1g_{1j}\quad(j=2,\cdots,p);\\
&a_{22}=g_{12}^2+s_2^2,\\
&\quad a_{2j}=g_{12}g_{1j}+s_2g_{2j}\quad(j=3,\cdots,p);\\
&a_{33}=g_{13}^2+g_{23}^2+s_3^2,\\
&\quad a_{3j}=g_{13}g_{1j}+g_{23}g_{2j}+s_3g_{3j}\quad(j=4,\cdots,p);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{pp}=g_{1p}^2+g_{2p}^2+\cdots+g_{p-1,p}^2+s_p^2.
\end{aligned}\right\}\qquad(9.8)
$$

依次解上式便得

$$
\left.\begin{aligned}
&s_1=\sqrt{a_{11}},\\
&\quad g_{1j}=a_{1j}/s_1\quad(j=2,\cdots,p);\\
&s_2=\sqrt{a_{22}-g_{12}^2},\\
&\quad g_{2j}=(a_{2j}-g_{12}g_{1j})/s_2\quad(j=3,\cdots,p);\\
&s_3=\sqrt{a_{33}-g_{13}^2-g_{23}^2},\\
&\quad g_{3j}=(a_{3j}-g_{13}g_{1j}-g_{23}g_{2j})/s_3\quad(j=4,\cdots,p);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&s_p=\sqrt{a_{pp}-g_{1p}^2-g_{2p}^2-\cdots-g_{p-1,p}^2}.
\end{aligned}\right\}\qquad(9.9)
$$

于是可以依次定出变换的系数。

［注］　这个变换是正規方程的一个解法——“平方根法”——的基础。若不要求“标准化”，则可以全部取1(或者其他适当的数)当作(9.6)中的 $s_1, s_2, \cdots, s_p$ (例如下节)。

§10 正交多項式

我們将把上节末尾提到的"正交化"的概念应用于配多項式的問題。

設数据 y 的"眞值"由已知值的变数 x 的二次式給出，而对眞值加上誤差項的值，就是观測值。如果对等間隔的 x 的值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，分别得到 y 的观測值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，那末它的构造可以写成

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \gamma x_i^2 + \varepsilon_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \qquad (10.1)$$

因此得 X 表如表 10,1。对应的正規方程的系数矩陣是

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} n & \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 \\ \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^4 \end{bmatrix}, \quad (10.2)$$

它不是对角型。

表 10.1　X 表

α	β	γ	数据
1	x_1	x_1^2	y_1
1	x_2	x_2^2	y_2
⋮	⋮	⋮	⋮
1	x_n	x_n^2	y_n

表 10.2　变换的矩陣

	β_0	β_1	β_2
α	1	k_{10}	k_{20}
β	0	1	k_{21}
γ	0	0	1

表 10.3　新的 X 表

β_0	β_1	β_2	数据
1	$X_1(x_1)$	$X_2(x_1)$	y_1
1	$X_1(x_2)$	$X_2(x_2)$	y_2
⋮	⋮		⋮
1	$X_1(x_n)$	$X_2(x_n)$	y_n

因此，我們想取适当的一次式和二次式

$$X_1(x) = x + k_{10}, \qquad (10.3)$$

$$X_2(x) = x^2 + k_{21}x + k_{20}, \qquad (10.4)$$

并把(10.1)改写为

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1(x_i) + \beta_2 X_2(x_i) + \varepsilon_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (10.5)$$

的形状，以便使新的 A 表变成对角型。結合 §6 的一般理論来說，这种作法相当于把变换的矩陣 $[p_{\alpha k}]$ 取为表 10.2 的形状。

得新的 X 表如表 10.3。与此对应的 A 表，其为对角型的必

要与充分的条件是:

$$\sum_i X_1(x_i)=0, \qquad \text{亦即} \sum_i (x_i+k_{10})=0, \tag{10.6}$$

$$\sum_i X_2(x_i)=0, \qquad \text{亦即} \sum_i (x_i^2+k_{21}x_i+k_{20})=0, \tag{10.7}$$

$$\sum_i X_1(x_i)X_2(x_i)=0, \quad \text{亦即} \sum_i (x_i+k_{10})(x_i^2+k_{21}x_i+k_{20})=0. \tag{10.8}$$

从(10.6)得

$$k_{10}=-\sum_i x_i/n=-\bar{x}, \tag{10.9}$$

于是确定了 $X_1(x)$ 的常数項。这样,也就知道了一次式 $X_1(x)$ 的形状必須是

$$X_1(x)=x-\bar{x}. \tag{10.10}$$

把(10.9)代入(10.8),幷改写其中的二次式,便得

$$\sum_i (x_i-\bar{x})\{(x_i-\bar{x})^2+(k_{21}+2\bar{x})(x_i-\bar{x})$$
$$+(k_{20}+k_{21}\bar{x}+\bar{x}^2)\}=0, \tag{10.11}$$

但因 x_i 是以 $\bar{x}$ 为中心而对称地散布着的,所以 $\sum_i (x_i-\bar{x})^3$ 和 $\sum_i (x_i-\bar{x})$ 都等于0,于是 $\sum_i (x_i-\bar{x})^2$ 的系数必須是0。由此可知

$$k_{21}=-2\bar{x}. \tag{10.12}$$

同样,改写(10.7),幷利用(10.12)便得到

$$\sum_i (x_i-\bar{x})^2+n(k_{20}-\bar{x}^2)=0. \tag{10.13}$$

因此确定了

$$k_{20}=\bar{x}^2-\sum_i (x_i-\bar{x})^2/n. \tag{10.14}$$

由此可知,二次式 $X_2(x)$ 的形状必須是

$$X_2(x)=x^2-2\bar{x}x+\bar{x}^2-\sum_i (x_i-\bar{x})^2/n$$
$$=(x-\bar{x})^2-\sum_i (x_i-\bar{x})^2/n. \tag{10.15}$$

例1 当 $x_i=i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 时,有

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}, \tag{10.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_i(x_i-\bar{x})^2&=\frac{1}{n}\Big(\sum_i x_i^2-n\bar{x}^2\Big)\\&=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\Big(\frac{n+1}{2}\Big)^2=\frac{n^2-1}{12},\end{aligned} \tag{10.17}$$

所以(10.10)和(10.15)具有下列形状：

$$X_1(x)=x-\frac{n+1}{2},\quad X_2(x)=\Big(x-\frac{n-1}{2}\Big)^2-\frac{n^2-1}{12}. \tag{10.18}$$

例 2 对一般情形，令 h 为間隔，并記

$$x_i=a-ih\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{10.19}$$

于是可以利用(10.17)，使得

$$X_1(x)=x-\bar{x},\quad X_2(x)=(x-\bar{x})^2-\frac{n^2-1}{12}h^2. \tag{10.20}$$

如果对 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，有上面定义的 $X_1(x)$ 和 $X_2(x)$ 的表，那末便可立刻造出表 10.3。而且正规方程是

$$\left.\begin{aligned}nb_0&=\sum_i y_i,\\\sum_i X_1(x_i)^2b_1&=\sum_i y_iX_1(x_i),\\\sum_i X_2(x_i)^2b_2&=\sum_i y_iX_2(x_i).\end{aligned}\right\} \tag{10.21}$$

于是得到解为

$$b_0=\frac{\sum_i y_i}{n},\quad b_1=\frac{\sum_i y_iX_1(x_i)}{\sum_i X_1(x_i)^2},\quad b_2=\frac{\sum_i y_iX_2(x_i)}{\sum_i X_2(x_i)^2}. \tag{10.22}$$

把分母 $S_1=\sum_i X_1(x_i)^2$ 和 $S_2=\sum_i X_2(x_i)^2$ 附在表的下面，往往要方便些。估計量 b_0, b_1, b_2 的方差是

$$V(b_0)=\sigma^2/n,\ V(b_1)=\sigma^2/S_1,\ V(b_2)=\sigma^2/S_2. \tag{10.23}$$

殘差平方和的計算公式是

$$S_E=\sum_i y_i^2-\Big\{\frac{(\sum y)^2}{n}+\frac{(\sum yX_1)^2}{S_1}+\frac{(\sum yX_2)^2}{S_2}\Big\}, \tag{10.24}$$

以自由度$(n-3)$来除上式，便得到 σ^2 的无偏估計。

例 3 当 $n=5$, $x_i=i$ $(i=1, 2, \cdots, 5)$ 时，(10.18)变成

$$X_1(x)=x-3,\ X_2(x)=(x-3)^2-2, \tag{10.25}$$

所以 $X_1(x_i)$, $X_2(x_i)$ 的値如表 10.4 所示。这样，我們的分析就是計算

表 10.4 $n=5$ 的情形

x_i	$X_1(x_i)$	$X_2(x_i)$
1	-2	2
2	-1	-1
3	0	-2
4	1	-1
5	2	2

$S_1=10,\ S_2=14$

$$\left.\begin{aligned}&\sum y=y_1+y_2+y_3+y_4+y_5,\\&\sum yX_1=-2y_1-y_2+y_4+2y_5,\\&\sum yX_2=2y_1-y_2-2y_3-y_4+2y_5,\end{aligned}\right\}\quad(10.26)$$

并以

$$b_0=\sum y/5,\quad b_1=\sum yX_1/10,\quad b_2=\sum yX_2/14\qquad(10.27)$$

来估計系数。

一般，对間隔 h 和平均值 $\bar{x}$ 的 n 个点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，为了便于数値計算，利用适当的系数 λ_1, λ_2 来定义

$$X_1(x)=\lambda_1\left(\frac{x-\bar{x}}{h}\right),\quad X_2(x)=\lambda_2\left\{\left(\frac{x-\bar{x}}{h}\right)^2-\frac{n^2-1}{12}\right\},\qquad(10.28)$$

然后对 $x=x_1, x_2, \cdots, x_n$，造出 $X_1(x_i)$ 和 $X_2(x_i)$ 的表。这与 h 和 $\bar{x}$ 无关，而仅仅由 n 确定。

同样，还可以定义

$$\left.\begin{aligned}X_3(x)&=\lambda_3\left\{\left(\frac{x-\bar{x}}{h}\right)^3-\frac{3n^2-7}{20}\left(\frac{x-\bar{x}}{h}\right)\right\},\\X_4(x)&=\lambda_4\left\{\left(\frac{x-\bar{x}}{h}\right)^4-\frac{3n^2-13}{14}\left(\frac{x-\bar{x}}{h}\right)^2\right.\\&\qquad\left.+\frac{3(n^2-1)(n^2-9)}{560}\right\},\\X_5(x)&=\lambda_5\left\{\left(\frac{x-\bar{x}}{h}\right)^5-\frac{5(n^2-7)}{18}\left(\frac{x-\bar{x}}{h}\right)^3\right.\\&\qquad\left.+\frac{15n^4-230n^2+407}{1008}\left(\frac{x-\bar{x}}{h}\right)\right\}.\end{aligned}\right\}\qquad(10.29)$$

考虑到 $X_0(x)=1$，于是上式满足如下正交性的条件：

$$\sum_i X_h(x_i)X_k(x_i)=0\quad(h\neq k).\qquad(10.30)$$

表的下面分别附有

$$S_h=\sum_i X_h(x_i)^2\quad(h=1,2,\cdots)\qquad(10.31)$$

和 λ_h 的値。表 10.5 列出了 $n=2\sim7$ 的表❶。

表 10.5 正交多項式 ($n=2\sim7$)

$n=2$	$n=3$		$n=4$			$n=5$				$n=6$					$n=7$				
X_1	X_1	X_2	X_1	X_2	X_3	X_1	X_2	X_3	X_4	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
−1	−1	1	−3	1	−1	−2	2	−1	1	−5	5	−5	1	−1	−3	5	−1	3	−1
1	0	−2	−1	−1	3	−1	−1	2	−4	−3	−1	7	−3	5	−2	0	1	−7	4
2	1	1	1	−1	−3	0	−2	0	6	−1	−4	4	2	−10	−1	−3	1	1	−5
2	2	6	3	1	1	1	−1	−2	−4	1	−4	−4	2	10	0	−4	0	6	0
	1	3	20	4	20	2	2	1	1	3	−1	−7	−3	−5	1	−3	−1	1	5
			2	1	$\frac{10}{3}$	10	14	10	70	5	5	5	1	1	2	0	−1	−7	−4
						1	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{35}{12}$	70	84	180	28	252	3	5	1	3	1
										2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{21}{10}$	28	84	6	154	84
															1	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{20}$

表下面的 ═══ 内表示 $S_h=\sum X_h^2$，下边的小数字表示 λ_h。

例 4❷ 設有两个独立变数 x 和 y，并对等間隔的 x_1, x_2, x_3 和等間隔的 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 組成的 15 个組合测定了 z 的值，設数据构造由下式給出：

$$z_{ij}=\alpha_{00}+\alpha_{10}x_i+\alpha_{01}y_j+\alpha_{20}x_i^2+\alpha_{02}y_j^2+\alpha_{11}x_iy_j+\varepsilon_{ij}$$

$$(i=1,\ 2,\ 3;\ \ j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5) \tag{10.32}$$

利用 $n=3$ 的正交多項式

$$X_1=x-2,\qquad X_2=3(x^2-4x+10/3) \tag{10.33}$$

和 $n=5$ 的正交多項式

$$Y_1=y-3,\qquad Y_2=y^2-6y+7, \tag{10.34}$$

可以把(10.32)改写为

$$z_{ij}=\beta_{00}+\beta_{10}X_1+\beta_{01}Y_1+\beta_{20}X_2+\beta_{02}Y_2+\beta_{11}X_1Y_1+\varepsilon_{ij}. \tag{10.35}$$

---

❶ 更詳細的表有下列几个：Fisher-Yates: Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research (Oliver and Boyd, 1949), 70～80; 北川、增山(书尾文献 [25]), 166～183; 山内二郎：电气試驗所研究报告，第 453 号 (1942); Anderson and Houseman: Res. Bull. 217 (Agr. Exp. St., Iowa State College, 1942), 595～672; Pearson-Hartley: Biometrika Tables for Statisticians, 1, (Cambridge University Press, 1954), 212～221.

❷ 实用例：H. C. Hamaker: Biometrics, 11 (1955), 271～275.

于是，得 X 表如表 10.6，得 A 表如表 10.7。

表 10.6 X表

β_{00}	β_{10}	β_{01}	β_{20}	β_{02}	β_{11}	数据
1	−1	−2	1	2	2	z_{11}
1	−1	−1	1	−1	1	z_{12}
1	−1	0	1	−2	0	z_{13}
1	−1	1	1	−1	−1	z_{14}
1	−1	2	1	2	−2	z_{15}
1	0	−2	−2	2	0	z_{21}
1	0	−1	−2	−1	0	z_{22}
1	0	0	−2	−2	0	z_{23}
1	0	1	−2	−1	0	z_{24}
1	0	2	−2	2	0	z_{25}
1	1	−2	1	2	−2	z_{31}
1	1	−1	1	−1	−1	z_{32}
1	1	0	1	−2	0	z_{33}
1	1	1	1	−1	1	z_{34}
1	1	2	1	2	2	z_{35}

表 10.7 A 表

b_{00}	b_{10}	b_{01}	b_{20}	b_{02}	b_{11}	$=1$
15						B_{00}
	10					B_{10}
		30				B_{01}
			30			B_{20}
				42		B_{02}
					20	B_{11}

注 表中

$B_{00}=Z_{..}=\sum_i\sum_j z_{ij}$，

$B_{10}=-Z_{1.}+Z_{3.}$，

$B_{01}=-2Z_{.1}-Z_{.2}+Z_{.4}+2Z_{.5}$，

$B_{20}=Z_{1.}-2Z_{2.}+Z_{3.}$，

$B_{02}=2Z_{.1}-Z_{.2}-2Z_{.3}-Z_{.4}+2Z_{.5}$，

$B_{11}=2z_{11}+z_{12}-z_{14}-2z_{15}-2z_{31}-z_{32}+z_{34}+2z_{35}$.

此处 $Z_{i.}=\sum_j z_{ij}$，$Z_{.j}=\sum_i z_{ij}$.

系数的估計値是：

$b_{00}=B_{00}/15$，$b_{10}=B_{10}/10$，$b_{01}=B_{01}/30$，$b_{20}=B_{20}/30$，$b_{02}=B_{02}/42$ 和 $b_{11}=B_{11}/20$，它們的方差分别是：

$$\sigma^2/15,\ \sigma^2/10,\ \sigma^2/30,\ \sigma^2/30,\ \sigma^2/42 \text{ 和 } \sigma^2/20.$$

残差平方和由

$$S_E=\sum_{ij} z_{ij}^2-(B_{00}^2/15+B_{10}^2/10+\cdots+B_{11}^2/20)$$

来計算，除以

$$N-p=15-6=9,$$

便得到 σ^2 的无偏估計。

第3章 正交設計

§11 秤量設計[1]

設有 p 件物品，它們的重量分别是 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$。把这些物品組合起来放在化学天平上进行秤量。設数据 y_α $(\alpha=1, 2, \cdots, N)$ 的构造可以写成

$$y_\alpha = x_{\alpha 1}\beta_1 + \cdots + x_{\alpha p}\beta_p + \varepsilon_\alpha \quad (\alpha=1, 2, \cdots, N), \tag{11.1}$$

这里，系数 $x_{\alpha i}$ 的定义是

$$x_{\alpha i} = \begin{cases} 1, & \text{当第 } \alpha \text{ 次测定中第 } i \text{ 个物品被放在左盘时,} \\ -1, & \text{当第 } \alpha \text{ 次测定中第 } i \text{ 个物品被放在右盘时,} \\ 0, & \text{当第 } \alpha \text{ 次测定中第 } i \text{ 个物品不被秤量时,} \end{cases} \tag{11.2}$$

并設測定誤差 $\varepsilon_\alpha (\alpha=1, \cdots, N)$ 相互独立地遵循正态分布 $N(0, \sigma^2)$。

一个秤量設計完全可以由一个矩陣 $[x_{\alpha i}]$ 来表达。如果这个矩陣的任何二列都相互正交，卽对任意不同的 i, j，有

$$\sum_\alpha x_{\alpha i} x_{\alpha j} = 0 \quad (i \neq j), \tag{11.3}$$

那末这个秤量設計叫做正交設計。在正交秤量設計中，如果所有的 $x_{\alpha i}$ 都取 1 或 -1，那末，(11.3) 和

$$\sum_\alpha x_{\alpha i}^2 = N \quad (i=1, \cdots, p) \tag{11.4}$$

同时成立。于是正規方程簡单地成为

$$N b_i = \sum_\alpha x_{\alpha i} y_\alpha \quad (i=1, \cdots, p), \tag{11.5}$$

从而可以确定 β_i 的估計值为

$$b_i = \sum_\alpha x_{\alpha i} y_\alpha / N \quad (i=1, \cdots, p). \tag{11.6}$$

---

[1] H. Hotelling: Annals of Math. Stat., 15 (1944), 297～306; 森口：品质管理, 4 (1953), 24～28, 64～69, 114～119 (119 頁有文献表)。

这时，$b_1, \cdots, b_p$ 相互独立，它們的数学期望分别是 $\beta_1, \cdots, \beta_p$，而且它們的方差都等于 σ^2/N。

［注］ 所有元素都是 1 或 -1，而且任何二列都相互正交的 N 阶矩陣，叫做 Hadamard 矩陣，記作 H_N。从 Hadamard 矩陣任意抽出 p 列来构造秤量設計，便得到具有上述性质的秤量設計。下面列出 $N=2, 4, 8, 12, 16, 20$ 的 Hadamard 矩陣的例子（+ 表示 +1，− 表示 −1）。

欲使 Hadamard 矩陣 H_N 存在，N 必須是 2，或者是 4 的倍数。但是目前仍未知道这是不是充分条件。到现在为止，在 $N \leqslant 100$ 的范圍内，除了 H_{92} 之外，对所有 4 的倍数都已实际造出了❶❷ H_N。H_{92} 至今尚未造出，但人們也未証明它不存在。

$$H_2=\begin{bmatrix} + & + \\ + & - \end{bmatrix},\quad H_4=\begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix},\quad H_8=\begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{bmatrix},$$

$$H_{12}=\begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & - & + & - & - & - & + & + & + & - & + \\ + & - & + & - & - & - & + & + & + & - & + & - \\ + & + & - & - & - & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & - & - & + & + & + & - & + & - & - & + \\ + & - & - & + & + & + & - & + & - & - & + & - \\ + & - & + & + & + & - & + & - & - & + & - & - \\ + & + & + & + & - & + & - & - & - & - & - & - \\ + & + & + & - & + & - & - & + & - & - & - & + \\ + & + & - & + & - & - & + & - & - & - & + & + \\ + & - & + & - & - & + & - & - & - & + & + & + \\ + & + & - & - & - & - & - & - & + & + & + & - \end{bmatrix},$$

❶ Plackett–Burman: Biometrika, **33** (1946), 305～325.

❷ 在 Plackett–Burman 之前，R. E. A. C. Paley 已就 $N \leqslant 200$ 的范圍，除 $N=92, 116, 172, 184, 188$ 以外，証明了对所有 4 的倍数都可构造 H_N。見 Paley: J. Math. Physics, 12 (1933), 311～320。——譯者注

$$H_{16}=\begin{bmatrix}
+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+\\
+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-\\
+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-\\
+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+\\
+&+&+&+&-&-&-&-&+&+&+&+&-&-&-&-\\
+&-&+&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+&-&+\\
+&+&-&-&-&-&+&+&+&+&-&-&-&-&+&+\\
+&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+&-&+&+&-\\
+&+&+&+&+&+&+&+&-&-&-&-&-&-&-&-\\
+&-&+&-&+&-&+&-&-&+&-&+&-&+&-&+\\
+&+&-&-&+&+&-&-&-&-&+&+&-&-&+&+\\
+&-&-&+&+&-&-&+&-&+&+&-&-&+&+&-\\
+&+&+&+&-&-&-&-&-&-&-&-&+&+&+&+\\
+&-&+&-&-&+&-&+&-&+&-&+&+&-&+&-\\
+&+&-&-&-&-&+&+&-&-&+&+&+&+&-&-\\
+&-&-&+&-&+&+&-&-&+&+&-&+&-&-&+
\end{bmatrix},$$

$$H_{20}=\begin{bmatrix}
+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+\\
+&-&-&+&+&-&-&-&-&+&-&+&-&+&+&+&+&-&-&+\\
+&-&+&+&-&-&-&-&+&-&+&-&+&+&+&+&-&-&+&-\\
+&+&+&-&-&-&-&+&-&+&-&+&+&+&+&-&-&+&-&-\\
+&+&-&-&-&-&+&-&+&-&+&+&+&+&-&-&+&-&-&+\\
+&-&-&-&-&+&-&+&-&+&+&+&+&-&-&+&-&-&+&+\\
+&-&-&-&+&-&+&-&+&+&+&+&-&-&+&-&-&+&+&-\\
+&-&-&+&-&+&-&+&+&+&+&-&-&+&-&-&+&+&-&-\\
+&-&+&-&+&-&+&+&+&+&-&-&+&-&-&+&+&-&-&-\\
+&+&-&+&-&+&+&+&+&-&-&+&-&-&+&+&-&-&-&-\\
+&-&+&-&+&+&+&+&-&-&+&-&-&+&+&-&-&-&-&+\\
+&+&-&+&+&+&+&-&-&+&-&-&+&+&-&-&-&-&+&-\\
+&-&+&+&+&+&-&-&+&-&-&+&+&-&-&-&-&+&-&+\\
+&-&+&+&+&-&-&+&-&-&+&+&-&-&-&-&+&-&+&-\\
+&+&+&+&-&-&+&-&-&+&+&-&-&-&-&+&-&+&-&+\\
+&+&-&-&-&+&-&-&+&+&-&-&-&-&+&-&+&-&+&+\\
+&+&-&-&+&-&-&+&+&-&-&-&-&+&-&+&-&+&+&+\\
+&-&-&+&-&-&+&+&-&-&-&-&+&-&+&-&+&+&+&+\\
+&-&+&-&-&+&+&-&-&-&-&+&-&+&-&+&+&+&+&-\\
+&+&-&-&+&+&-&-&-&-&+&-&+&-&+&+&+&+&-&-
\end{bmatrix}.$$

例 按照表11.1的設計称4个物品的重量(这个表使用了H_8的第2列,第3列,第6列和第7列)。由于这个設計具有正交性,所以結果的分析是簡单的。各个物品的重量的估計值由

表11.1 組合測定

β_1	β_2	β_3	β_4	数据
1	1	1	1	y_1
−1	1	1	−1	y_2
1	−1	1	1	y_3
−1	−1	1	−1	y_4
1	1	−1	−1	y_5
−1	1	−1	1	y_6
1	−1	−1	−1	y_7
−1	−1	−1	1	y_8

$$\left.\begin{array}{ll} b_1=B_1/8, & B_1=y_1-y_2+y_3-y_4+y_5-y_6+y_7-y_8,\\ b_2=B_2/8, & B_2=y_1+y_2-y_3-y_4+y_5+y_6-y_7-y_8,\\ b_3=B_3/8, & B_3=y_1+y_2+y_3+y_4-y_5-y_6-y_7-y_8,\\ b_4=B_4/8, & B_4=y_1-y_2+y_3-y_4-y_5+y_6-y_7+y_8 \end{array}\right\}$$

給出,而殘差平方和則由

$$S_E=\sum y^2-(B_1^2+B_2^2+B_3^2+B_4^2)/8$$

来計算。以$N-p=8-4=4$除上式,便得到σ^2的无偏估計。

〔注1〕 如果天平有偏差,設这个偏差为β_0,并把它当作一个参数,那末由于它的系数都是1,所以加上这一列后并不丧失正交性。这样,β_0的估計值由

$$b_0=G/8,\ \ G=y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8$$

給出,而殘差平方和是从上述的S_E減去$G^2/8$而得到的,因而自由度又減少一个,也就是3.

〔注2〕 欲从个别測定中求得正交秤量設計所得到的精度(方差为σ^2/N),就必須分别对每一物品进行N次測定。因为正交秤量設計总共只需要N次測定,所以当时常需要进行反复測定时,利用正交秤量設計是比較方便的❶。

§12 2^n型正交陣列

实驗室里的实驗也罢,生产現場进行的工場实驗也罢,影响測定值的原因是很多的,如果夸張一点,甚至可以說是无穷的。不过,我們可以从其中提出一些比較重要的原因加以控制(使它固定于我們所希望的值),而对于其他次要的原因,就任凭它們随机变化,至于它們的影响,可以概括为"誤差項"。这时,提出来加以控

❶ 实用例:中村・柴山:品质管理,6(1955),467~469;葛野:同上杂志,6,617~619;葛野・刑部:品质管理シンポジウム报文集(1956),93~96;秋山:品质管理,8(1957),25~27.

制的原因就叫做因子。考虑 m 个因子，并設每一因子分别有二种变化(二水平)的实验，这种試驗叫做 2^m 型試驗設計。

在 2^m 型試驗中，因子的組合共有 2^m 个，因此，若对所有的組合全部进行試驗，则必須取 $N=2^m$ 个数据。对于 $2^4=16$ 和 $2^5=32$，虽然数字不大，但对于 $2^6=64$ 和 $2^7=128$，就需要作大量的試驗了。至于 $2^{10}=1024$，若沒有相当的决心，还可能中途产生气餒。而在实际上，重要的因子大于 10 的情况又是很多的。不过，如果各个因子的效应是可加的，即数据的构造可以写成

$$y=\mu\pm\alpha\pm\beta\pm\gamma\pm\cdots\pm\lambda+\varepsilon; \qquad (12.1)$$

此处 $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\cdots$, $\pm\lambda$ 分别表示各个因子的效应，那末从 2^m 个組合中适当地抽出一部分来实施，就可以达到預期的目的。(12.1)的 μ 是"一般平均"，ε 是"誤差項"。正确地写(12.1)就是

$$y_\alpha=\mu+\sum_{i=1}^{m}x_{\alpha i}\beta_i+\varepsilon_\alpha \quad (\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ N), \qquad (12.2)$$

此处設系数 $x_{\alpha i}$ $(\alpha=1,\ \cdots,\ N;\ i=1,\ \cdots,\ m)$ 取 $+1$ 或者 -1。即在第 α 个测定中，若对第 i 个因子的二水平中的一水平规定 $x_{\alpha i}$ 取 $+1$，则对該因子的另一水平规定 $x_{\alpha i}$ 取 $-1$❶。μ 是常数，ε_α $(\alpha=1,\ \cdots,N)$ 是独立地遵循正态分布 $N(0,\sigma^2)$ 的随机变数。

例 考虑設备，原料，温度和 pH 为 4 个因子。設設备有 I 和 II，原料有 A 和 B，温度取 100°C 和 120°C，pH 取 3.0 和 3.5。这时，我們作設計如表 12.1。这是 $N=8$ 个組合的实驗，相当于实施整个 2^4 型設計的所有可能組合的一半。这时，数据的构造与上节例子(表 11.1)的情形相同。設系数 $x_{\alpha i}$ 当設备是 I，原料是 A，温度是 120°C，pH 是

表 12.1 $2^4(N=8)$

No.	設备	原料	温度	pH
1	I	A	120°C	3.5
2	II	A	120°C	3.0
3	I	B	120°C	3.5
4	II	B	120°C	3.0
5	I	A	100°C	3.0
6	II	A	100°C	3.5
7	I	B	100°C	3.0
8	II	B	100°C	3.5

❶ 一般对連續变量的因子，如温度等，规定高水平取 $+1$，低水平取 -1。——譯者注

3.5 时取 $+1$（这种对应对于 β_i 的解釋是重要的，但无論如何規定，分析的原理总是一样的）。此外，在这种情形中有一項"一般平均" μ，它相当于上节例子中的天平的偏差。因为分析的方法与上节的例子相同，所以从略。至于結果的解釋，若其他条件相同，则可以估計：使用設备 I 比使用設备 II，y 平均高出 $2b_1$；同样可以估計：利用原料 A 比利用原料 B，y 平均高出 $2b_2$；使温度从 100°C 变为 120°C 时，y 平均高出 $2b_3$；使 pH 从 3.0 变为 3.5 时，y 平均高出 $2b_4$。而且，当固定这些因子于一定的水平时，由于其他原因而引起的 y 的随机变化的方差 σ^2，可以用残差的无偏方差 $V_E=\{\sum y^2-(G^2+\sum B_i^2)/8\}/3$ 来估計（参看上节末尾的注）。

若因子的影响不是可加的，则称这种因子間存在着"交互作用"。例如在上例中，若設备和原料的影响不是可加的，则說在設备和原料之間存在着交互作用。这时，我們可以多引进一个表示交互作用的参数，并且考虑如表 12.2 的构造。設表示設备×原料的交互作用的参数 β_3 的系数恒等于設备效应 β_1 的系数与原料效应 β_2 的系数的乘积。这时 X 表也具有正交性（β_3 的列相当于上节 H_8 的第 4 列），所以按照上节所述的方法，便可进行这种試驗的分析。

表 12.2　存在交互作用时的 X 表的例子

（+ 表示 +1，− 表示 −1）

No.	設备 β_1	原料 β_2	設备×原料 β_3	温度 β_4	pH β_5	数据
1	+	+	+	+	+	y_1
2	−	+	−	+	−	y_2
3	+	−	−	+	+	y_3
4	−	−	+	+	−	y_4
5	+	+	+	−	−	y_5
6	−	+	−	−	+	y_6
7	+	−	−	−	−	y_7
8	−	−	+	−	+	y_8

一般，如上节的 H_4，H_8，H_{16} 那样，可以造出 N 等于 2 的乘

冪的 Hadamard 矩陣，使得其中必有一列等于其他任何二列对应元素的乘积。因此当交互作用存在时，就可以象表 12.2 的情形那样来处理(但必須注意，不应把其他因子排在交互作用这一列上)。与此相反，当交互作用存在时，利用 H_{12} 和 H_{20}，X 表的正交性就不完整❶，因而分析会碰到一些困难。

高阶交互作用，即三个因子以上的交互作用存在的情形，和上面一样，只須造出包含交互作用的参数在内的构造表即可。若那是具有正交性的設計，則可按照上节的方法进行分析。当考虑所有 m 个因子的交互作用时，欲作具有正交性的設計，就必須实施所有 2^m 个因子組合(甚至重复几次)。这就是 2^m 型的"完全因子試験設計"。

§13 s^m 型正交陣列

考虑 m 个因子的試験，設每个因子都具有 s 水平。例如，把 s 部設备，s 种原料，s 种温度和 s 种 pH 組合起来作試験。

当第 1 个因子取水平 λ 时，記其效应为 $\beta_{1\lambda}(\lambda=0, 1, \cdots, s-1)$。同样，記第 2 个因子以及其余因子的效应为 $\beta_{2\lambda}, \cdots, \beta_{m\lambda}$。若交互作用不存在，則数据的构造是

$$y_\alpha=\mu+\sum_{i=1}^{m}\beta_{i\lambda_i}+\varepsilon_\alpha \quad (\alpha=1, 2, \cdots, N). \qquad (13.1)$$

此处 μ 是"一般平均"，ε_α 是独立地遵循 $N(0, \sigma^2)$ 的"誤差"。因为各因子的水平組合 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ 每次測定都有所不同，所以把它記如表 13.1。表中的每一个 * 应記入从 0 到 $s-1$ 的任何一个数字。用这个表完全可以表达一种設計。

表 13.1 因子組合表

α	λ_1	λ_2	$\cdots$	λ_m
1	*	*	$\cdots$	*
2	*	*	$\cdots$	*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
N	*	*	$\cdots$	*

❶ 因为在 H_{12} 或者 H_{20} 中，任意一列不等于其余任意二列的乘积。这个性质，由于 12 和 20 不是 2 的乘冪这一性质所决定。——譯者注

表13.2　$3^5(N=27)$

测定次数 α	因子A的水平 λ_1	因子B的水平 λ_2	因子P的水平 λ_3	因子Q的水平 λ_4	因子R的水平 λ_5
1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1
3	2	0	0	2	2
4	0	1	0	0	0
5	1	1	0	1	1
6	2	1	0	2	2
7	0	2	0	0	0
8	1	2	0	1	1
9	2	2	0	2	2
10	0	0	1	1	2
11	1	0	1	2	0
12	2	0	1	0	1
13	0	1	1	1	2
14	1	1	1	2	0
15	2	1	1	0	1
16	0	2	1	1	2
17	1	2	1	2	0
18	2	2	1	0	1
19	0	0	2	2	1
20	1	0	2	0	2
21	2	0	2	1	0
22	0	1	2	2	1
23	1	1	2	0	2
24	2	1	2	1	0
25	0	2	2	2	1
26	1	2	2	0	2
27	2	2	2	1	0

例1　在 $m=5$ 个因子分别有 $s=3$ 水平的实験的情形，若按照表13.2的因子組合进行 $N=27$ 个测定，則实际上是从 $3^5=243$ 个可能組合中选擇1/9即选27个来实施。

因为在构造式(13.1)中存在着无用参数，所以要象§8那样作变換。也就是說，令

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{s}} & u_{01} & u_{02} & \cdots & u_{0,s-1} \\ \frac{1}{\sqrt{s}} & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,s-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{s}} & u_{s-1,1} & u_{s-1,2} & \cdots & u_{s-1,s-1} \end{bmatrix} \tag{13.2}$$

为一个正交矩陣，然后由

$$\beta_{i\lambda}=\frac{1}{\sqrt{s}}\dot{\beta}_{i0}+\sum_{k=1}^{s-1}u_{\lambda k}\dot{\beta}_{ik}\quad(\lambda=0,\ \cdots,\ s-1) \tag{13.3}$$

把 $\beta_{i0},\ \cdots,\ \beta_{i,s-1}$ 变换为 $\dot{\beta}_{i0},\ \cdots,\ \dot{\beta}_{i,s-1}$（矩陣(13.2)的具体例子，可以参看§8）。对各个因子 i $(i=1,\ \cdots,\ m)$ 都作这种变换，然后令

$$\mu=\dot{\mu}-\frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{i=1}^{m}\dot{\beta}_{i0}, \tag{13.4}$$

便可以把(13.1)改写为

$$y_\alpha=\dot{\mu}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s-1}u_{\lambda_{i}k}\dot{\beta}_{ik}+e_\alpha\quad(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ N). \tag{13.5}$$

例 2　关于表 13.2 的設計，若列出(13.5)的构造表（X表），则得表 13.3。但因

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & u_{01} & u_{02} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & u_{11} & u_{12} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

是正交矩陣，所以有

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\lambda=0}^{2}u_{\lambda 1}=\sum_{\lambda=0}^{2}u_{\lambda 2}=0, \\ &\sum_{\lambda=0}^{2}u_{\lambda 1}u_{\lambda 2}=0, \end{aligned}\right\}$$

表13.3　X表

$\hat{\mu}$	$\hat{\beta}_{11}$	$\hat{\beta}_{12}$	$\hat{\beta}_{21}$	$\hat{\beta}_{22}$	$\hat{\beta}_{31}$	$\hat{\beta}_{32}$	$\hat{\beta}_{41}$	$\hat{\beta}_{42}$	$\hat{\beta}_{51}$	$\hat{\beta}_{52}$	数据
1	u_{01}	u_{02}	u_{01}	u_{02}	u_{01}	u_{02}	u_{01}	u_{02}	u_{01}	u_{02}	y_1
1	u_{11}	u_{12}	u_{01}	u_{02}	u_{01}	u_{02}	u_{11}	u_{12}	u_{11}	u_{12}	y_2
1	u_{21}	u_{22}	u_{01}	u_{02}	u_{01}	u_{02}	u_{21}	u_{22}	u_{21}	u_{22}	y_3
1	u_{01}	u_{02}	u_{11}	u_{12}	u_{01}	u_{02}	u_{01}	u_{02}	u_{01}	u_{02}	y_4
1	u_{11}	u_{12}	u_{11}	u_{12}	u_{01}	u_{02}	u_{11}	u_{12}	u_{11}	u_{12}	y_5
1	u_{21}	u_{22}	u_{11}	u_{12}	u_{01}	u_{02}	u_{21}	u_{22}	u_{21}	u_{22}	y_6
1	u_{01}	u_{02}	u_{21}	u_{22}	u_{01}	u_{02}	u_{01}	u_{02}	u_{01}	u_{02}	y_7
1	u_{11}	u_{12}	u_{21}	u_{22}	u_{01}	u_{02}	u_{11}	u_{12}	u_{11}	u_{12}	y_8
1	u_{21}	u_{22}	u_{21}	u_{22}	u_{01}	u_{02}	u_{21}	u_{22}	u_{21}	u_{22}	y_9
1	u_{01}	u_{02}	u_{01}	u_{02}	u_{11}	u_{12}	u_{11}	u_{12}	u_{21}	u_{22}	y_{10}
1	u_{11}	u_{12}	u_{01}	u_{02}	u_{11}	u_{12}	u_{21}	u_{22}	u_{01}	u_{02}	y_{11}
1	u_{21}	u_{22}	u_{01}	u_{02}	u_{11}	u_{12}	u_{01}	u_{02}	u_{11}	u_{12}	y_{12}
1	u_{01}	u_{02}	u_{11}	u_{12}	u_{11}	u_{12}	u_{11}	u_{12}	u_{21}	u_{22}	y_{13}
1	u_{11}	u_{12}	u_{11}	u_{12}	u_{11}	u_{12}	u_{21}	u_{22}	u_{01}	u_{02}	y_{14}
1	u_{21}	u_{22}	u_{11}	u_{12}	u_{11}	u_{12}	u_{01}	u_{02}	u_{11}	u_{12}	y_{15}
1	u_{01}	u_{02}	u_{21}	u_{22}	u_{11}	u_{12}	u_{11}	u_{12}	u_{21}	u_{22}	y_{16}
1	u_{11}	u_{12}	u_{21}	u_{22}	u_{11}	u_{12}	u_{21}	u_{22}	u_{01}	u_{02}	y_{17}
1	u_{21}	u_{22}	u_{21}	u_{22}	u_{11}	u_{12}	u_{01}	u_{02}	u_{11}	u_{12}	y_{18}
1	u_{01}	u_{02}	u_{01}	u_{02}	u_{21}	u_{22}	u_{21}	u_{22}	u_{11}	u_{12}	y_{19}
1	u_{11}	u_{12}	u_{01}	u_{02}	u_{21}	u_{22}	u_{01}	u_{02}	u_{21}	u_{22}	y_{20}
1	u_{21}	u_{22}	u_{01}	u_{02}	u_{21}	u_{22}	u_{11}	u_{12}	u_{01}	u_{02}	y_{21}
1	u_{01}	u_{02}	u_{11}	u_{12}	u_{21}	u_{22}	u_{21}	u_{22}	u_{11}	u_{12}	y_{22}
1	u_{11}	u_{12}	u_{11}	u_{12}	u_{21}	u_{22}	u_{01}	u_{02}	u_{21}	u_{22}	y_{23}
1	u_{21}	u_{22}	u_{11}	u_{12}	u_{21}	u_{22}	u_{11}	u_{12}	u_{01}	u_{02}	y_{24}
1	u_{01}	u_{02}	u_{21}	u_{22}	u_{21}	u_{22}	u_{21}	u_{22}	u_{11}	u_{12}	y_{25}
1	u_{11}	u_{12}	u_{21}	u_{22}	u_{21}	u_{22}	u_{01}	u_{02}	u_{21}	u_{22}	y_{26}
1	u_{21}	u_{22}	u_{21}	u_{22}	u_{21}	u_{22}	u_{11}	u_{12}	u_{01}	u_{02}	y_{27}

由此可知，表 13.3 具有正交性。这就是説，对任意的 i 和 k，$\hat{\beta}_{ik}$ 的列与 $\hat{\mu}$ 的列的内积是 $9(u_{0k}+u_{1k}+u_{2k})=0$（因为每一 λ_i 取 0，1，2 各 9 次）。同理，对同一的 i，$\hat{\beta}_{i1}$ 的列与 $\hat{\beta}_{i2}$ 的列的内积是 $9(u_{01}u_{02}+u_{11}u_{12}+u_{21}u_{22})=0$。但对不同的 i，i'（$k=k'$ 或者 $k\neq k'$），$\hat{\beta}_{ik}$ 的列与 $\hat{\beta}_{i'k'}$ 的列的内积是

$$3(u_{0k}+u_{1k}+u_{2k})(u_{0k'}+u_{1k'}+u_{2k'})=0$$

（因为 λ_i 和 $\lambda_{i'}$ 的 9 个組合 00，01，02，10，11，12，20，21，22 各出現三次）。

一般地說，若在表 13.1 中，下列两个条件得到满足，則 (13.5) 的构造表具有正交性：

(1) 对任意的 i, λ_i 取每一个 $0, 1, \cdots, s-1$ 的次数相同。

(2) 对任意不同的 i 和 i', $(\lambda_i, \lambda_{i'})$ 取 s^2 个組合 $(0, 0), (0, 1), \cdots, (0, s-1); (1, 0), (1, 1), \cdots, (1, s-1); \cdots; (s-1, 0), (s-1, 1), \cdots, (s-1, s-1)$ 的次数相同。

因为，由 (1) 推知，对任意的 i 和 k, $\hat{\mu}$ 的系数与 $\hat{\beta}_{ik}$ 的系数的乘积之和是

$$\frac{N}{s}\sum_{\lambda=0}^{s-1}u_{\lambda k}=0;$$

其次，同样由 (1) 推知，对同一的 i 以及不同的 k 和 k', $\hat{\beta}_{ik}$ 的系数与 $\hat{\beta}_{ik'}$ 的系数的乘积之和是

$$\frac{N}{s}\sum_{\lambda=0}^{s-1}u_{\lambda k}u_{\lambda k'}=0;$$

最后，由 (2) 推知，对不同的 i, i' 以及任意的 k 和 k', $\hat{\beta}_{ik}$ 的系数与 $\hat{\beta}_{i'k'}$ 的系数的乘积之和是

$$\frac{N}{s^2}\sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{\lambda'=0}^{s-1}u_{\lambda k}u_{\lambda' k'}=\frac{N}{s^2}\sum_{\lambda=0}^{s-1}u_{\lambda k}\sum_{\lambda'=0}^{s-1}u_{\lambda' k'}=0.$$

下面討論上列两个条件被满足的情形。

$\hat{\mu}$ 的系数的平方和等于 N. 而且由 (1) 推知，对于任意的 i, k, $\hat{\beta}_{ik}$ 的系数的平方和等于

$$\frac{N}{s}\sum_{\lambda=0}^{s-1}u_{\lambda k}^2=\frac{N}{s}.$$

正規方程的右边，对 $\hat{\mu}$ 是 $\sum_\alpha y_\alpha$, 而对 $\hat{\beta}_{ik}$ 是 $\sum_\alpha u_{\lambda_i k}y_\alpha$ (注意 λ_i 是 α 的函数)，或者可以写成 $\sum_\lambda B_{i\lambda}u_{\lambda k}$, 此处 $B_{i\lambda}$ 是 λ_i 等于 λ 的那些数据的总和。因此，估計量是

$$\hat{m}=\frac{1}{N}\sum_\alpha y_\alpha, \tag{13.6}$$

$$\hat{b}_{ik}=\frac{s}{N}\sum_{\alpha}u_{\lambda k}y_{\alpha}=\frac{s}{N}\sum_{\lambda}B_{i\lambda}u_{\lambda k}$$

$$(i=1,\cdots,m;\ k=1,\cdots,s-1)。\tag{13.7}$$

这些估計量是相互独立的，它們的方差是

$$V(\hat{m})=\frac{\sigma^2}{N};\quad V(\hat{b}_{ik})=\frac{s}{N}\sigma^2$$

$$(i=1,\cdots,m;\ k=1,\cdots,s-1)。\tag{13.8}$$

为了使参数的一次式

$$\theta=l_0\mu+\sum_{i=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{s-1}l_{i\lambda}\beta_{i\lambda}\tag{13.9}$$

是可估計的，在改写后的式子

$$\theta=l_0\hat{\mu}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{k=1}^{s-1}l_{i\lambda}u_{\lambda k}\hat{\beta}_{ik}+\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{\lambda=0}^{s-1}l_{i\lambda}-l_0\right)\frac{1}{\sqrt{s}}\hat{\beta}_{i0}\tag{13.10}$$

中，应使 $\hat{\beta}_{i0}$ $(i=1,\cdots,m)$ 的系数都等于0。即必須有

$$\sum_{\lambda=0}^{s-1}l_{i\lambda}=l_0\quad(i=1,\cdots,m)。\tag{13.11}$$

满足(13.11)的 θ 就是可估計的。

例如，由满足

$$\sum_{\lambda=0}^{s-1}c_{\lambda}=0\tag{13.12}$$

的任意系数 $c_0,\cdots,c_{s-1}$ 所构成的

$$\theta_C=\sum_{\lambda=0}^{s-1}c_{\lambda}\beta_{i\lambda}\tag{13.13}$$

是可估計的。这叫做第 i 个因子效应的"对比"。$\beta_{i0}-\beta_{i1}$ 和 $\beta_{i0}+\beta_{i1}-2\beta_{i2}$ 就是对比的例子。改写 θ_C 便得

$$\theta_C=\sum_{\lambda=0}^{s-1}c_{\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\beta_{i0}+\sum_{k=1}^{s-1}u_{\lambda k}\beta_{ik}\right)=\sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{k=1}^{s-1}c_{\lambda}u_{\lambda k}\beta_{ik},\tag{13.14}$$

所以它的估計量由

$$\hat{\theta}_C=\sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{k=1}^{s-1}c_{\lambda}u_{\lambda k}\hat{b}_{ik}\tag{13.15}$$

給出。以(13.7)代入上式，便得

$$\hat{\theta}_C=\sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{k=1}^{s-1}c_\lambda u_{\lambda k}\frac{s}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}u_{\lambda_i k}y_\alpha$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{s-1}c_\lambda\frac{s}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{s-1}u_{\lambda k}u_{\lambda_i k}\right)y_\alpha. \qquad (13.16)$$

但是，由于(13.2)是正交矩陣，我們有关系

$$\frac{1}{s}+\sum_{k=1}^{s-1}u_{\lambda k}u_{\lambda' k}=\begin{cases}1, & \lambda=\lambda',\\ 0, & \lambda\neq\lambda',\end{cases} \qquad (13.17)$$

所以 $\sum\limits_k u_{\lambda k}u_{\lambda_i k}$ 仅当 λ_i 等于 λ 时才为 $1-1/s$，而在其他情形时皆为 $-1/s$. 从而(13.16)变成

$$\hat{\theta}_C=\sum_{\lambda=0}^{s-1}c_\lambda\frac{s}{N}\left(B_{i\lambda}-\frac{1}{s}G\right)=\sum_{\lambda=0}^{s-1}c_\lambda\frac{s}{N}B_{i\lambda}, \qquad (13.18)$$

此处，如上面所述，$B_{i\lambda}$ 是 λ_i 等于 λ 的那些 y_α 的和，也就是第 i 个因子以水平 λ 出現时的数据（有 N/s 个）的和；G 是数据的总和，但在上式右边中，由于(13.12)而导致包含它的項消失了。

利用(13.15)和(13.8)便可算得 $\hat{\theta}_C$ 的方差为

$$V(\hat{\theta}_C)=\sum_{k=1}^{s-1}\left(\sum_{\lambda=0}^{s-1}c_\lambda u_{\lambda k}\right)^2\frac{s}{N}\sigma^2$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{\lambda'=0}^{s-1}c_\lambda c_{\lambda'}\sum_{k=1}^{s-1}u_{\lambda k}u_{\lambda' k}\frac{s}{N}\sigma^2=\sum_{\lambda=0}^{s-1}c_\lambda^2\frac{s}{N}\sigma^2. \quad (13.19)$$

再举一个可估計的一次式的例子。当各因子的水平分别指定为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 时，y 的数学期望是

$$\theta_M=\mu+\sum_{i=1}^{m}\beta_{i\lambda_i}, \qquad (13.20)$$

改写上式便得

$$\theta_M=\mu+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s-1}u_{\lambda_i k}\beta_{ik}, \qquad (13.21)$$

所以这是可估計的。它的估計量由

$$\hat{\theta}_M=m+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s-1}u_{\lambda_i k}b_{ik} \qquad (13.22)$$

給出。以(13.7)代入上式，經过和上面一样的整理，便得

$$\hat{\theta}_M=\frac{G}{N}+\sum_{i=1}^{m}\frac{s}{N}\left(B_{i\lambda_i}-\frac{1}{s}G\right)=\frac{s}{N}\sum_{i=1}^{m}B_{i\lambda_i}-\frac{m-1}{N}G. \quad (13.23)$$

而且从(13.22)和(13.8)推知，它的方差是

$$V(\hat{\theta}_M)=\frac{\sigma^2}{N}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s-1}u_{\lambda_i k}^2\frac{s}{N}\sigma^2$$

$$=\frac{\sigma^2}{N}+\sum_{i=1}^{m}\left(1-\frac{1}{s}\right)\frac{s}{N}\sigma^2=\frac{1+m(s-1)}{N}\sigma^2. \quad (13.24)$$

例 3 对例1的情形，从表13.2求各因子的各水平的部分和，便得

$$\left.\begin{aligned}
B_{10}&=y_1+y_4+y_7+y_{10}+y_{13}+y_{16}+y_{19}+y_{22}+y_{25},\\
B_{11}&=y_2+y_5+y_8+y_{11}+y_{14}+y_{17}+y_{20}+y_{23}+y_{26},\\
B_{12}&=y_3+y_6+y_9+y_{12}+y_{15}+y_{18}+y_{21}+y_{24}+y_{27},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
B_{52}&=y_3+y_6+y_9+y_{10}+y_{13}+y_{16}+y_{20}+y_{23}+y_{26}.
\end{aligned}\right\}$$

在进行实际計算的时候，把这些部分和列成表13.4的形状較为方便。

$$\theta_C=c_0\beta_{i0}+c_1\beta_{i1}+c_2\beta_{i2}\;(c_0-c_1+c_2=0)$$

的估計量是

$$\hat{\theta}_C=\frac{c_0B_{i0}+c_1B_{i1}+c_2B_{i2}}{9},$$

它的方差是

$$V(\hat{\theta}_C)=(c_0^2+c_1^2+c_2^2)\frac{\sigma^2}{9}.$$

又

$$\theta_M=\mu+\beta_{1\lambda_1}+\beta_{2\lambda_2}+\beta_{3\lambda_3}+\beta_{4\lambda_4}+\beta_{5\lambda_5}$$

的估計量是

表13.4 各水平的部分和

因子 \ 水平	0	1	2	和
A	B_{10}	B_{11}	B_{12}	G
B	B_{20}	B_{21}	B_{22}	G
P	B_{30}	B_{31}	B_{32}	G
Q	B_{40}	B_{41}	B_{42}	G
R	B_{50}	B_{51}	B_{52}	G

$$\hat{\theta}_M=\frac{G}{27}+\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{B_{i\lambda_i}}{9}-\frac{G}{27}\right)=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{5}B_{i\lambda_i}-\frac{4}{27}G,$$

它的方差是

$$V(\hat{\theta}_M)=\frac{1+5\times 2}{27}\sigma^2=\frac{11}{27}\sigma^2.$$

殘差平方和的計算公式是

$$S_E=\sum_{\alpha=1}^{N}y_\alpha^2-\left\{\frac{1}{N}\Big(\sum_\alpha y_\alpha\Big)^2+\frac{s}{N}\sum_i\sum_k\Big(\sum_\lambda B_{i\lambda}u_{\lambda k}\Big)^2\right\}. \quad (13.25)$$

由于

$$\sum_{k=1}^{s-1}\left(\sum_{\lambda=0}^{s-1}B_{i\lambda}u_{\lambda k}\right)^2=\sum_{k=1}^{s-1}\sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{\lambda'=0}^{s-1}B_{i\lambda}B_{i\lambda'}u_{\lambda k}u_{\lambda' k}$$
$$=\sum_{\lambda=0}^{s-1}B_{i\lambda}^2-\frac{1}{s}\sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{\lambda'=0}^{s-1}B_{i\lambda}B_{i\lambda'}=\sum_{\lambda=0}^{s-1}B_{i\lambda}^2$$
$$-\frac{1}{s}\left(\sum_{\lambda=0}^{s-1}B_{i\lambda}\right)^2=\sum_{\lambda=0}^{s-1}B_{i\lambda}^2-\frac{1}{s}G^2, \quad (13.26)$$

因此可以把(13.25)改写为

$$S_E=\sum_{\alpha}y_\alpha^2-\left\{\frac{G^2}{N}+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{s}{N}\sum_{\lambda=0}^{s-1}B_{i\lambda}^2-\frac{G^2}{N}\right)\right\}$$
$$=\sum_{\alpha}y_\alpha^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{s}{N}\sum_{\lambda=0}^{s-1}B_{i\lambda}^2+\frac{m-1}{N}G^2. \quad (13.27)$$

以自由度 $N-\{1+m(s-1)\}$ 除上式，便得 σ^2 的无偏估計。

例 4 在例 3 的情形中，殘差平方和可以由

$$S_E=\sum_{\alpha=1}^{27}y_\alpha^2-\left\{\frac{G^2}{27}+\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{B_{i0}^2+B_{i1}^2+B_{i2}^2}{9}-\frac{G^2}{27}\right)\right\}$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{27}y_\alpha^2-\sum_{i=1}^{5}\sum_{\lambda=0}^{2}\frac{B_{i\lambda}^2}{9}+\frac{4G^2}{27}$$

来計算。以 $27-(1+5\times2)=16$ 除上式，便得 σ^2 的无偏估計。

［注］ 在本节中，"拉丁方"相当于 $m=3$, $N=s^2$ 的情形；"希腊·拉丁方"相当于 $m=4$, $N=s^2$ 的情形。$m>4$, $N=s^2$ 的情形叫做"超希腊·拉丁方"，$m=3$, $N=s^3$ 的情形叫做"拉丁立方"。因为这些設計都可以理解为 s^m 型因子試驗的"部分实施法"❶，所以本节就作了这样的处理。

§14 交互作用(s^m 型的情形)

上一节假設交互作用不存在，并且利用了只包含主要效应的构造式(13.1)。但是，即使交互作用存在，如上节那样，如果各因

❶ fractional replication 的譯語。也有人譯作"部分重复"(見[30]的中譯本)，但"重复"的語义与实际有出入。

一般地說，在因子試驗中，当因子个数 m 大时，試驗組合 s^m 也大，这样，在同一区組(环境条件)下做試驗是不可能的。因此需要考虑：1) 犧牲某些效应，以便減少試驗組合(个数)；2) 不減少試驗組合，而縮小在同一区組(环境条件)内的試驗組合。1) 的思想产生了部分实施法；2) 的思想产生了混杂法(見§20 的［注］)。由于二因子以上的交互作用可以忽略不計，因此通常犧牲或混杂这些效应。詳見 D. J. Finney: Ann. Eugen., 12 (1945), 291～301; Cochran-Cox[4], Kempthorne[9], 北川[21,II] 和增山[22]。——譯者注

子的水平数 s 为一定的，并且这个 s 是素数，如 2, 3, 5, 7，或者是“素数的乘幂”，如 $4(=2^2)$, $8(=2^3)$, $9(=3^2)$，那末为了表示二因子交互作用(自由度是$(s-1)^2$)，可以考虑为在因子中多加上 $(s-1)$ 个 s 水平的因子似的(实际上相当于 $(s-1)$ 个参数)❶。詳細情形可以参看本丛书增山元三郎：“实驗計画法”一书❷。这里只举出几个例子。

$s=2$ 的情形，处理方法已在 §12 中作了叙述。

$s=3$ 的情形，为了表示二因子交互作用，可以考虑为在因子中多加上 2 个三水平的因子似的。为了表示因子 A 和因子 B 的交互作用而引进的 2 个新的“拟似因子”，按照系統的記法記作(AB)和(AB^2)。若因子 A 的水平是 λ_1，因子 B 的水平是 λ_2，則一般的原則是，令(AB)的水平等于 $\lambda_1+\lambda_2 \pmod 3$，$(AB^2)$的水平等于 $\lambda_1+2\lambda_2 \pmod 3$。

例 1 在上节的例 1 中，当因子 A 和因子 B 的交互作用不能忽略时，应該引进(AB)和(AB^2)为交互作用的分量，并以 λ_3, λ_4 表示它們的水平，以 λ_5, λ_6 和 λ_7 分别表示因子 P, Q 和 R 的水平(依次降低标号)，这样可以得到与(13.1)相同的模型，其中 $m=7$。这时表 13.2 变为表 14.1。

表 14.1 也具有上节所述意义的正交性，所以完全可以象上节那样地进行分析。各水平部分和的表由表 13.4 变为表 14.2。残差平方和的計算公式是

$$S_E=\sum_{\alpha=1}^{27} y_\alpha^2-\left\{\frac{G^2}{27}+\sum_{i=1}^{7}\left(\frac{B_{i0}^2+B_{i1}^2+B_{i2}^2}{9}-\frac{G^2}{27}\right)\right\}$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{27} y_\alpha^2-\sum_{i=1}^{7}\sum_{\lambda=0}^{2}\frac{B_{i\lambda}^2}{9}+\frac{6G^2}{27},$$

它的自由度是 $27-(1+7\times 2)=12$。$V_E=S_E/12$ 是 σ^2 的无偏估計。

[注] 通常把主要效应和交互作用統称为因子效应。

$s=4$ 的情形，一般不把因子的水平 $\lambda=0, 1, 2, 3$ 看做普通的

---

❶ 即把二因子交互作用看做 s 水平的因子。由于二因子交互作用的自由度是 $(s-1)^2$，而且在 s^m 型正交陣列中每列(因子)只有$(s-1)$个自由度，所以必須多加 $(s-1)$ 列，才能得到 $(s-1)(s-1)=(s-1)^2$ 个自由度。——譯者注

❷ 即增山[31]。——譯者注

表 14.1 $3^7(\Lambda=27)$ 水平組合表

测定次数 α	A 的水平 λ_1	B 的水平 λ_2	(AB)的水平 λ_3	(AB^2)的水平 λ_4	P 的水平 λ_5	Q 的水平 λ_6	R 的水平 λ_7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	1	1
3	2	0	2	2	0	2	2
4	0	1	1	2	0	0	0
5	1	1	2	0	0	1	1
6	2	1	0	1	0	2	2
7	0	2	2	1	0	0	0
8	1	2	0	2	0	1	1
9	2	2	1	0	0	2	2
10	0	0	0	0	1	1	2
11	1	0	1	1	1	2	0
12	2	0	2	2	1	0	1
13	0	1	1	2	1	1	2
14	1	1	2	0	1	2	0
15	2	1	0	1	1	0	1
16	0	2	2	1	1	1	2
17	1	2	0	2	1	2	0
18	2	2	1	0	1	0	1
19	0	0	0	0	2	2	1
20	1	0	1	1	2	0	2
21	2	0	2	2	2	1	0
22	0	1	1	2	2	2	1
23	1	1	2	0	2	0	2
24	2	1	0	1	2	1	0
25	0	2	2	1	2	2	1
26	1	2	0	2	2	0	2
27	2	2	1	0	2	1	0

表 14.2 各水平部分和

因子效应 \ 水平	0	1	2	总 計
A	B_{10}	B_{11}	B_{12}	G
B	B_{20}	B_{21}	B_{22}	G
(AB)	B_{30}	B_{31}	B_{32}	G
(AB^2)	B_{40}	B_{41}	B_{42}	G
P	B_{50}	B_{51}	B_{52}	G
Q	B_{60}	B_{61}	B_{62}	G
R	B_{70}	B_{71}	B_{72}	G

表 14.3 加法

+	α_0	α_1	α_2	α_3
α_0	α_0	α_1	α_2	α_3
α_1	α_1	α_0	α_3	α_2
α_2	α_2	α_3	α_0	α_1
α_3	α_3	α_2	α_1	α_0

表 14.4 乘法

×	α_0	α_1	α_2	α_3
α_0	α_0	α_0	α_0	α_0
α_1	α_0	α_1	α_2	α_3
α_2	α_0	α_2	α_3	α_1
α_3	α_0	α_3	α_1	α_2

数，而考虑把它对应于 Galois 域 $GF(2^2)$ 的元素 $\alpha_0=0$，$\alpha_1=1$，$\alpha_2=t$，$\alpha_3=t^2$。这里 t 是一个原根，它满足关系 $t^2=t+1$。若以 mod 2 来解释系数，便得加法表如表 14.3，乘法表如表 14.4。利用这种算术的规则，可以把交互作用的分量(AB)，(AB^2)和(AB^3)的水平定义为：

因子 A 的水平 λ_1，

因子 B 的水平 λ_2，

表 14.5 $s=4$ 的情形

A的水平 λ_1	B的水平 λ_2	(AB)的水平 λ_3	(AB^2)的水平 λ_4	(AB^3)的水平 λ_5
0	0	0	0	0
1	0	1	1	1
2	0	2	2	2
3	0	3	3	3
0	1	1	2	3
1	1	0	3	2
2	1	3	0	1
3	1	2	1	0
0	2	2	3	1
1	2	3	2	0
2	2	0	1	3
3	2	1	0	2
0	3	3	1	2
1	3	2	0	3
2	3	1	3	0
3	3	0	2	1

$$\left.\begin{array}{ll}\text{分量(AB)的水平 }\lambda_3, & \alpha_{\lambda_3}=\alpha_{\lambda_1}+\alpha_1\alpha_{\lambda_2},\\ \text{分量(AB}^2\text{)的水平 }\lambda_4, & \alpha_{\lambda_4}=\alpha_{\lambda_1}+\alpha_2\alpha_{\lambda_2},\\ \text{分量(AB}^3\text{)的水平 }\lambda_5, & \alpha_{\lambda_5}=\alpha_{\lambda_1}+\alpha_3\alpha_{\lambda_2}.\end{array}\right\}\qquad(14.1)$$

具体地說，就是表 14.5 的关系。

[注] 在交互作用可以被忽略的情形下，把表 14.5 的 λ_3 或 λ_4 当作别的因子的水平，便可进行部分实施法。这就是所謂 4×4 的拉丁方或者希腊-拉丁方(参看上节末尾的注)。

§15 多因子試驗模型

本节將討論一般的构造模型。它包含着前面讲过的各种模型，作为特殊情形。

設有 m 个因子 $F_j(j=1, \cdots, m)$，并設各个因子分别具有 s_j 个水平

$$\lambda_j=0, 1, \cdots, s_j-1 \qquad (15.1)$$

(这叫做 $s_1\times s_2\times\cdots\times s_m$ 型)。

这时，可以考虑的因子效应有下列 2^m-1 个：

主要效应：	F_j 的主要效应	m 个，
二因子交互作用：	$F_{j_1}\times F_{j_2}$	$\binom{m}{2}$ 个，
三因子交互作用：	$F_{j_1}\times F_{j_2}\times F_{j_3}$	$\binom{m}{3}$ 个，
…………………	………………	………，
m 因子交互作用：	$F_1\times F_2\times\cdots\times F_m$	1 个。

一般，設 t 因子交互作用(若 $t=1$，則是主要效应)

$$F_{j_1}\times F_{j_2}\times\cdots\times F_{j_t} \qquad (15.2)$$

由与此有关的因子的标号集合

$$J=\{j_1, j_2, \cdots, j_t\} \qquad (15.3)$$

来标志。J 是 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 的子集。設空集合 O 对应于一般平均。除空集合以外，子集总共有 2^m-1 个，它們分别对应于上列

各个因子效应。

当我們进行分析时，往往只考虑 2^m-1 个因子效应中的一部分，而忽略其余的部分（一般地說，高阶交互作用往往是可以忽略的）。不能忽略的因子效应的标志 J 的集合記为 $\mathfrak{S}$。但規定主要效应 $\{1\}$, $\{2\}$, $\cdots$, $\{m\}$ 恒包含于 $\mathfrak{S}$，并且，若某个 J 包含于 $\mathfrak{S}$，則 J 的子集也全都包含于 $\mathfrak{S}$。今后恒假設 $\sum\limits_{J}$ 的 J 都属于 $\mathfrak{S}$。

因子效应 $J=\{j_1, \cdots, j_t\}$ 的效应，可以由与此有关的因子的水平 $\lambda_{j_1}, \cdots, \lambda_{j_t}$ 来确定。这样，我們可以利用矢量記号

$$\Lambda_J=(\lambda_{j_1}, \cdots, \lambda_{j_t}), \tag{15.4}$$

把这个效应記作 $\beta_J(\Lambda_J)$。因为一般平均不依賴于因子的水平而恒为一定，所以記作 β_0。这样一来，数据的构造模型就是

$$y_\alpha=\beta_0+\sum_J B_J(\Lambda_J(\alpha))+\varepsilon_\alpha \quad (\alpha=1, \cdots, N), \tag{15.5}$$

此处，ε_α 是独立地遵循 $N(0, \sigma^2)$ 的誤差，而

$$\Lambda_J(\alpha)=(\lambda_{j_1}(\alpha), \cdots, \lambda_{j_t}(\alpha)) \tag{15.6}$$

是从第 α 个测定时出現的各因子水平 $\lambda_1(\alpha)$, $\cdots$, $\lambda_m(\alpha)$ 中抽出所有属于 J 的因子标号 $j_1, \cdots, j_t$ 而排成的矢量。对 $\alpha=1, \cdots, N$ 列出 $\lambda_1(\alpha), \cdots, \lambda_m(\alpha)$ 的表，就是試驗設計表。

因为在(15.5)中一般存在着无用参数，所以要象 § 13 那样作变换，使无用参数消掉。为此，先对各因子标号 j 分别定义 s_j 阶正交矩陣

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{s_j}} & u_j(0, 1) & \cdots & u_j(0, s_j-1) \\ \frac{1}{\sqrt{s_j}} & u_j(1, 1) & \cdots & u_j(1, s_j-1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{s_j}} & u_j(s_j-1, 1) & \cdots & u_j(s_j-1, s_j-1) \end{bmatrix} (j=1, \cdots, m), \tag{15.7}$$

然后利用这个矩陣，对任意的 $J=\{j_1,\cdots,j_t\}$，任意的 $\Lambda_J=(\lambda_{j_1},\cdots,\lambda_{j_t})$ 和任意的

$$K_J=(k_{j_1},\cdots,k_{j_t})\quad(k_j=1,\cdots,s_j-1)\quad(j\in J),\qquad(15.8)$$

定义

$$U_J(\Lambda_J,K_J)=\prod_{j\in J}u_j(\lambda_j,k_j)=u_{j_1}(\lambda_{j_1},k_{j_1})\cdots u_{j_t}(\lambda_{j_t},k_{j_t}).\quad(15.9)$$

下面推导有关上式的基本关系。上式的依据是矩陣(15.7)的正交性，即列与列的乘积之和可以記为

$$\sum_{\lambda_j}u_j(\lambda_j,k_j)=0,\qquad(15.10)$$

$$\sum_{\lambda_j}u_j(\lambda_j,k_j)u_j(\lambda_j,k_j^*)=\delta_{k_jk_j^*},\qquad(15.11)$$

行与行的乘积之和可以記为

$$\frac{1}{s_j}+\sum_{k_j}u_j(\lambda_j,k_j)u_j(\lambda_j^*,k_j)=\delta_{\lambda_j\lambda_j^*},\qquad(15.12)$$

此处 δ_{kk^*} 是 Kronecker 記号。

以后利用求和記号 $\sum\limits_{\Lambda_J}=\sum\limits_{\lambda_{j_1}}\cdots\sum\limits_{\lambda_{j_t}}$，$\sum\limits_{K_J}=\sum\limits_{k_{j_1}}\cdots\sum\limits_{k_{j_t}}$，并規定 λ_j 从 0 变到 s_j-1；k_j 从 1 变到 s_j-1。首先，从(15.10)立刻看出

$$\sum_{\Lambda_J}U_J(\Lambda_J,K_J)=0.\qquad(15.13)$$

其次，利用(15.10)和(15.11)便得

$$\sum_{\Lambda_{J\cup J^*}}U_J(\Lambda_J,K_J)U_{J^*}(\Lambda_{J^*},K_{J^*}^*)$$
$$=\sum_{\Lambda_{J-JJ^*}}\ \sum_{\Lambda_{J^*-JJ^*}}\ \sum_{\Lambda_{JJ^*}}\ \prod_{j\in(J-JJ^*)}u_j(\lambda_j,k_j)\prod_{j\in(J^*-JJ^*)}u_j(\lambda_j,k_j^*)$$
$$\times\prod_{j\in JJ^*}u_j(\lambda_j,k_j)u_j(\lambda_j,k_j^*)=\delta(J,J^*)\delta(K_J,K_J^*),\quad(15.14)$$

这里令 $\delta(J,J^*)$ 当 $J=J^*$ 时等于 1，其他情形等于 0；$\delta(K_J,K_J^*)$ 当 $K_J=K_J^*$ 时等于 1，其他情形等于 0.

此外，对属于 J 的所有 j 来求(15.12)的乘积，便得

$$\prod_{j\in J}\left\{\frac{1}{s_j}+\sum_{k_j}u_j(\lambda_j,k_j)u_j(\lambda_j^*,k_j)\right\}=\delta(\Lambda_J,\Lambda_J^*).\quad(15.15)$$

这式还可以改写为下列形状：

$$\prod_{j\in J}\frac{1}{s_j}+\sum_{J'\subset J}\Big(\prod_{j\in(J-J')}\frac{1}{s_j}\Big)\sum_{K_{J'}}U_{J'}(\Lambda_{J'},K_{J'})U_{J'}(\Lambda^*_{J'},K_{J'})$$
$$=\delta(\Lambda_J,\Lambda^*_J),\tag{15.16}$$

这里 $\sum_{J'\subset J}$ 是对 J 的所有子集 J'（包含 J 本身，但不包含空集合）的求和。

根据上面的准备，我們定义新的参数为

$$\dot\beta_0=\beta_0+\sum_J\Big(\prod_{j\in J}\frac{1}{s_j}\Big)\sum_{\Lambda_J}\beta_J(\Lambda_J),\tag{15.17}$$

$$\dot\beta_J(K_J)=\sum_{\Lambda_J}U_J(\Lambda_J,K_J)\sum_{J'\supset J}\Big(\prod_{j\in(J'-J)}\frac{1}{s_j}\Big)\sum_{\Lambda_{J'-J}}\beta_{J'}(\Lambda_{J'}).\tag{15.18}$$

(15.17)是各因子效应的平均之和，而(15.18)是这样得来的：在与因子效应 $J'(\supset J)$ 有关的因子中，固定与 J 有关的因子水平，而使其他因子水平变化幷求其平均，再将这个平均对所有 $J'(\supset J)$ 求和，然后再作相当于坐标軸旋轉的变换。因此，我們有

$$\dot\beta_0+\sum_J\sum_{K_J}U_J(\Lambda_J,K_J)\dot\beta_J(K_J)$$
$$=\beta_0+\sum_J\Big(\prod_{j\in J}\frac{1}{s_j}\Big)\sum_{\Lambda_J}\beta_J(\Lambda_J)+\sum_J\sum_{K_J}U_J(\Lambda_J,K_J)$$
$$\times\sum_{\Lambda'_J}U_J(\Lambda'_J,K_J)\sum_{J'\supset J}\Big(\prod_{j\in(J'-J)}\frac{1}{s_j}\Big)\sum_{\Lambda'_{J'-J}}\beta_{J'}(\Lambda'_{J'})$$
$$=\beta_0+\sum_{J'}\sum_{\Lambda'_{J'}}\beta_{J'}(\Lambda'_{J'})\Big\{\prod_{j\in J'}\frac{1}{s_j}+\sum_{J\subset J'}\Big(\prod_{j\in(J'-J)}\frac{1}{s_j}\Big)$$
$$\times\sum_{K_J}U_J(\Lambda'_J,K_J)U_J(\Lambda_J,K_J)\Big\}$$
$$=\beta_0+\sum_{J'}\beta_{J'}(\Lambda_{J'})\tag{15.19}$$

（最后用了(15.16)）。从而数据的構造式(15.5)可以写成

$$y_\alpha=\dot\beta_0+\sum_J\sum_{K_J}U_J(\Lambda_J(\alpha),K_J)\dot\beta_J(K_J)+\varepsilon_\alpha$$
$$(\alpha=1,\cdots,N).\tag{15.20}$$

(15.5)所包含的参数个数是 $1+\sum_{J'}\prod_{j\in J}s_j$，而(15.20)只包含

$$p=1+\sum_J\prod_{j\in J}(s_j-1)\tag{15.21}$$

个参数，即减少了全部无用参数的个数。

欲使表現(15.20)的 X 表满足正交性：

$$\sum_{\alpha} U_J(\Lambda_J(\alpha),\ K_J)=0 \quad (\text{对任意的 } J,\ K_J), \qquad (15.22)$$

$$\sum_{\alpha} U_J(\Lambda_J(\alpha),\ K_J)U_{J^*}(\Lambda_{J^*}(\alpha),\ K_{J^*}^*)=0$$

(除 $J=J^*$, $K_J=K_J^*$ 的情形以外恒成立)，(15.23)

其必要与充分条件是下列(1)和(2)同时成立。

(1) 对于任意的 j, 因子 F_j 的各水平 $0,\ 1,\ \cdots,\ s_j-1$ 出現的次数相同(即每个恰好出現 N/s_j 次)。

(2) 若 $J=\{j_1,\ \cdots,\ j_t\}$ 与 $J'=\{j_1',\ \cdots,\ j_{t'}'\}$ 是沒有公共点的集合，則水平矢量 Λ_J 的可能值(有 $\prod_{j\in J} s_j$ 組)中的任意一个与水平矢量 $\Lambda_{J'}$ 的可能值中的任意一个同时出現的次数恒为一定(即 $N/\prod_{j\in(J+J')} s_j$)。

証明 必要性：对于任意給定的 j 和 λ_j, 在(15.22)中令 $J=\{j\}$, 便可导出

$$\sum_{\alpha}\left\{\frac{1}{s_j}+\sum_{k_j} u_j(\lambda_j(\alpha),\ k_j)u_j(\lambda_j,\ k_j)\right\}=\frac{N}{s_j}. \qquad (15.24)$$

用(15.12)来解釋上式，便知满足 $\lambda_j(\alpha)=\lambda_j$ 的那些 α 的个数是 N/s_j。这就意味着(1)。其次，对于满足 $JJ'=0$ 的任意的 J 和 J', 以及任意的 Λ_J 和 $\Lambda_{J'}$, 从(15.22)和(15.23)可以导出

$$\sum_{\alpha}\prod_{j\in J}\left\{\frac{1}{s_j}+\sum_{k_j} u_j(\lambda_j(\alpha),\ k_j)u_j(\lambda_j,\ k_j)\right\}$$
$$\times\prod_{j\in J'}\left\{\frac{1}{s_j}+\sum_{k_j} u_j(\lambda_j(\alpha),\ k_j)u_j(\lambda_j,\ k_j)\right\}$$
$$=N\prod_{j\in(J+J')}\left(\frac{1}{s_j}\right). \qquad (15.25)$$

用(15.15)来解釋上式，可知它意味着(2)。

充分性：对任意的 $J=\{j_1,\ \cdots,\ j_t\}$ 和任意的 K_J, 可以把(15.22)的左边改写为

$$\sum_{\alpha} U_J(\Lambda_J(\alpha), K_J) = \sum_{\Lambda_J} \sum_{\Lambda_J(\alpha)=\Lambda_J} U_J(\Lambda_J, K_J), \qquad (15.26)$$

此处 $\sum\limits_{\Lambda_J(\alpha)=\Lambda_J}$ 是对满足 $\Lambda_J(\alpha)=\Lambda_J$ 的那些 α 的求和。当 $t=1$ 时，从条件 (1) 和 (15.13) 推知 (15.26) 等于 0；当 $t\geqslant 2$ 时，对 $\{j_1\}$ 和 $J'=\{j_2, \cdots, j_t\}$，利用条件(2)便得

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha} U_J(\Lambda_J(\alpha), K_J)\\&\quad=\sum_{\Lambda_{J'}} \sum_{\lambda_{j_1}} \sum_{\substack{\Lambda_{J'}(\alpha)=\Lambda_{J'}\\ \lambda_{j_1}(\alpha)=\lambda_{j_1}}} U_{J'}(\Lambda_{J'}, K_{J'}) u_{j_1}(\lambda_{j_1}, k_{j_1}) = 0. \qquad (15.27)\end{aligned}$$

其次，考虑(15.23)的左边。第一，当 $J=J^*$，$K_J \neq K_J^*$ 时，对某一个 $j_l \in J$ 有 $k_{j_l} \neq k_{j_l}^*$，所以令 $J'=J-\{j_l\}$ 便得

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha} U_J(\Lambda_J(\alpha), K_J) U_J(\Lambda_J(\alpha), K_J^*)\\&\quad=\sum_{\Lambda_{J'}} \sum_{\lambda_{j_l}} \sum_{\substack{\Lambda_{J'}(\alpha)=\Lambda_{J'}\\ \lambda_{j_l}(\alpha)=\lambda_{j_l}}} U_{J'}(\Lambda_{J'}, K_{J'}) U_{J'}(\Lambda_{J'}, K_{J'}^*)\\&\qquad\times u_{j_l}(\lambda_{j_l}, k_{j_l}) u_{j_l}(\lambda_{j_l}, k_{j_l}^*) = 0 \qquad (15.28)\end{aligned}$$

(对 J' 和 $\{j_l\}$ 利用条件(2)，并利用(15.11))。第二，若 $J\neq J^*$，則 $J-JJ^*$ 或 J^*-JJ^* 中至少有一个不是空集。不丧失普遍性，可以假設 $J-JJ^*=J'\neq 0$。对于 J' 和 J^*，利用条件(2)便得

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha} U_J(\Lambda_J(\alpha), K_J) U_{J^*}(\Lambda_{J^*}(\alpha), K_{J^*}^*)\\&\quad=\sum_{\Lambda_{J^*}} \sum_{\Lambda_{J'}} \sum_{\substack{\Lambda_{J^*}(\alpha)=\Lambda_{J^*}\\ \Lambda_{J'}(\alpha)=\Lambda_{J'}}} U_{JJ^*}(\Lambda_{JJ^*}, K_{JJ^*}) U_{J^*}(\Lambda_{J^*}, K_{J^*}^*)\\&\qquad\times U_{J'}(\Lambda_{J'}, K_{J'}) = 0 \qquad (15.29)\end{aligned}$$

(因为从条件(2)推知，既满足 $\Lambda_{J^*}(\alpha)=\Lambda_{J^*}$ 又满足 $\Lambda_{J'}(\alpha)=\Lambda_{J'}$ 的那些 α 对所有的 Λ_{J^*} 和 $\Lambda_{J'}$ 都有相同的个数)。　　証毕

满足上述条件(1)和(2)的試驗設計，叫做正交多因子試驗設計。对于这种設計，正規方程的系数矩陣是对角型的。对角綫上的元素，对 $\hat{\beta}_0$ 是 N，对 $\hat{\beta}_J(K_J)$ 是

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha} \{U_J(\Lambda_J(\alpha), K_J)\}^2 &= \sum_{\Lambda_J} \sum_{\Lambda_J(\alpha)=\Lambda_J} \{U_J(\Lambda_J, K_J)\}^2\\&= N \prod_{j\in J} \frac{1}{s_j}. \qquad (15.30)\end{aligned}$$

因此，$\hat{\beta}_0$ 的估計量由

$$\hat{b}_0=G/N, \quad G=\sum_{\alpha} y_{\alpha} \tag{15.31}$$

給出，而 $\hat{\beta}_J(K_J)$ 的估計量則由下式給出：

$$\begin{aligned}\hat{b}_J(K_J)&=\left(\frac{1}{N}\prod_{j\in J} s_j\right)\sum_{\alpha} y_{\alpha}U_J(A_J(\alpha),\, K_J)\\&=\left(\frac{1}{N}\prod_{j\in J} s_j\right)\sum_{A_J} U_J(A_J,\, K_J)B_J(A_J),\end{aligned} \tag{15.32}$$

此处

$$B_J(A_J)=\sum_{A_J(\alpha)=A_J} y_{\alpha} \tag{15.33}$$

是对满足 $A_J(\alpha)=A_J$ 的那些数据所求的和。

(15.31)和(15.32)的方差分别是

$$V(\hat{b}_0)=\frac{\sigma^2}{N} \text{ 和 } V(\hat{b}_J(K_J))=\left(\frac{1}{N}\prod_{j\in J} s_j\right)\sigma^2, \tag{15.34}$$

而且这些估計量是相互独立的。

当分别指定各因子的水平为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 时，y 的数学期望是

$$\theta_M=\beta_0+\sum_J\sum_{K_J} U_J(A_J,\, K_J)\beta_J(K_J), \tag{15.35}$$

它可以由

$$\hat{\theta}_M=\hat{b}_0+\sum_J\sum_{K_J} U_J(A_J,\, K_J)\hat{b}_J(K_J) \tag{15.36}$$

来估計，而它的方差是

$$\begin{aligned}V(\hat{\theta}_M)&=\frac{\sigma^2}{N}+\sum_J\sum_{K_J}\{U_J(A_J,\, K_J)\}^2\left(\frac{1}{N}\prod_{j\in J} s_j\right)\sigma^2\\&=\frac{\sigma^2}{N}+\sum_J\prod_{j\in J}\left(1-\frac{1}{s_j}\right)\left(\frac{1}{N}\prod_{j\in J} s_j\right)\sigma^2\\&=\frac{1}{N}\{1+\sum_J\prod_{j\in J}(s_j-1)\}\sigma^2\\&=\frac{p}{N}\sigma^2,\end{aligned} \tag{15.37}$$

此处 p 是参数的个数(15.21)。这个 p 又可以理解为："不能忽略的因子效应的自由度之和加上1"。

[注 1]　田口玄一❶猜想公式(15.37)可以适用于完全因子試驗設計(多因子試驗設計)、拉丁方以及更广范的試驗設計。当多因子試驗設計为正交設計时,此式能够适用于这种設計(以及其逆)的証明已由森口❷得出。

[注 2]　用(15.32)可以把(15.36)的代表項改写为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K_J} U_J(\Lambda_J, K_J) b_J(K_J) \\
&=\left(\frac{1}{N}\prod_{j\in J} s_j\right)\sum_{K_J}\sum_{\Lambda'_J} U_J(\Lambda_J, K_J) U_J(\Lambda'_J, K_J) B_J(\Lambda'_J) \\
&=\left(\frac{1}{N}\prod_{j\in J} s_j\right)\sum_{\Lambda'_J} B_J(\Lambda'_J)\prod_{j\in J}\sum_{k_j} u_j(\lambda_j, k_j) u_j(\lambda'_j, k_j) \\
&=\left(\frac{1}{N}\prod_{j\in J} s_j\right)\sum_{\Lambda'_J} B_J(\Lambda'_J)\prod_{j\in J}\left(\delta_{\lambda_j\lambda'_j}-\frac{1}{s_j}\right) \\
&=\left(\frac{1}{N}\prod_{j\in J} s_j\right)\sum_{\Lambda'_J} B_J(\Lambda'_J)\left\{\sum_{J'\subset J}\prod_{j\in J'}\delta_{\lambda_j\lambda'_j}\prod_{j\in(J-J')}\left(-\frac{1}{s_j}\right)+\prod_{j\in J}\left(-\frac{1}{s_j}\right)\right\} \\
&=\sum_{J'\subset J}\frac{(-1)^{t-t'}}{N}\left(\prod_{j\in J'} s_j\right) B_{J'}(\Lambda_{J'})+(-1)^t\frac{G}{N},
\end{aligned}
\tag{15.38}
$$

此处 t' 是属于 J' 的标号的个数。令(15.38)为 $b_J(\Lambda_J)$,并設 $b_0=b_0$, 于是它們是未經变换的原参数組的一个最小二乘解。

例如,若 $J=\{1, 2, 3\}$, 则(15.38)变为

$$
\begin{aligned}
b_{123}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = {} & \frac{s_1 s_2 s_3}{N} B_{123}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - \frac{s_1 s_2}{N} B_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \\
& - \frac{s_1 s_3}{N} B_{13}(\lambda_1, \lambda_3) - \frac{s_2 s_3}{N} B_{23}(\lambda_2, \lambda_3) \\
& + \frac{s_1}{N} B_1(\lambda_1) + \frac{s_2}{N} B_2(\lambda_2) + \frac{s_3}{N} B_3(\lambda_3) - \frac{G}{N}.
\end{aligned}
\tag{15.39}
$$

例❸　在因子数 $m=5$, 水平数 $s_1=2$, $s_2=2$, $s_3=4$, $s_4=2$, $s_5=3$ 的情形, $N=48$ 个测定的正交陣列的例子列如表 15.1。这个設計相当于完全因子試驗的可能組合 $2^3\times3\times4=96$ 的 1/2 (即部分实施)。对于 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_5)$, 所有可能組合 $2^2\times4\times3=48$ 都已出現。但是,例如对 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 的 16 个可能組合中的每一个, (λ_4, λ_5) 的 6 个可能組合中只有 3 个出現,所以若在

---

❶ 田口:品质管理, **4**(1953), 436.

❷ Sigeiti Moriguti: Rep. Stat. Appl. Res., JUSE, **3**(1954), 75～97.

❸ 这个設計的实用例,可参看 C. A. Bicking: Ind ıstrial Quality Control, **9**, No. 4 (1953), 8～11 (森口:品质管理,岩波全书, p. 104 有介紹)。

所考慮的因子效应中也把 $F_1\times F_2\times F_3$ 和 $F_4\times F_5$ 同时包含进去，則对应的列不是正交的❶。

表 15.1 $2^3\times3\times4$ 型 ($N=48$)

No.	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	No.	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
1	0	0	0	0	0	25	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	26	1	0	0	0	1
3	0	0	0	1	2	27	1	0	0	1	2
4	0	0	1	1	0	28	1	0	1	1	0
5	0	0	1	1	1	29	1	0	1	1	1
6	0	0	1	0	2	30	1	0	1	0	2
7	0	0	2	0	0	31	1	0	2	0	0
8	0	0	2	1	1	32	1	0	2	1	1
9	0	0	2	1	2	33	1	0	2	1	2
10	0	0	3	1	0	34	1	0	3	1	0
11	0	0	3	0	1	35	1	0	3	0	1
12	0	0	3	0	2	36	1	0	3	0	2
13	0	1	0	1	0	37	1	1	0	1	0
14	0	1	0	1	1	38	1	1	0	1	1
15	0	1	0	0	2	39	1	1	0	0	2
16	0	1	1	0	0	40	1	1	1	0	0
17	0	1	1	0	1	41	1	1	1	0	1
18	0	1	1	1	2	42	1	1	1	1	2
19	0	1	2	1	0	43	1	1	2	1	0
20	0	1	2	0	1	44	1	1	2	0	1
21	0	1	2	0	2	45	1	1	2	0	2
22	0	1	3	0	0	46	1	1	3	0	0
23	0	1	3	1	1	47	1	1	3	1	1
24	0	1	3	1	2	48	1	1	3	1	2

❶ 原书討論 $m=6$, $s_1=2$, $s_2=2$, $s_3=4$, $s_4=2$, $s_5=3$, $s_6=3$ 的情形，并在表 15.1 中多加上一列 λ_6，即相当于 $2^3\times3^2\times4=288$ 的 1/6. 后来有人指出 λ_5 与 λ_6 不满足正交性。著者已在"岩波讲座 現代应用数学"第 13 卷附录(1958 年 4 月 10 日)上发表了修改意見。这里譯者已按照著者的修改意見譯出。

λ_5 与 λ_6 不滿足正交性，是容易驗証的。(λ_5, λ_6)的可能組合是 9 个，但測定次数 $N=48$ 不是 9 的倍数，所以每个組合出現的次数是不可能相同的。因此，由 § 13 正交性的条件(2)，立即推出 λ_5 与 λ_6 不滿足正交性。——譯者注

第4章　方差分析[1]

§16 数据的分解

考虑在一般的綫性模型

$$y_\alpha=\sum_{i=1}^{p}x_{\alpha i}\beta_i+\varepsilon_\alpha \quad (i=1, 2, \cdots, N) \tag{16.1}$$

中，具有正交性

$$\sum_\alpha x_{\alpha i}x_{\alpha j}=0 \quad (i\neq j) \tag{16.2}$$

的情形(上节所述的正交多因子設計也是它的特殊情形)。

根据§9的几何解釋，这时 N 維矢量 $[x_{\alpha 1}]$, $[x_{\alpha 2}]$, $\cdots$, $[x_{\alpha p}]$ 是相互垂直的。因此，只要补上既与这些矢量垂直而又彼此相互垂直的 $(N-p)$ 个矢量 $[z_{\alpha, p+1}]$, $\cdots$, $[z_{\alpha N}]$，便可以构造一个正交系。$[x_{\alpha i}]$ $(i=1, \cdots, p)$ 的长度分别是

$$s_i=\sqrt{\sum_\alpha x_{\alpha i}^2} \quad (i=1, \cdots, p). \tag{16.3}$$

$[z_{\alpha j}]$ $(j=p+1, \cdots, N)$ 的长度規定都等于1，也就是

$$\sum_\alpha z_{\alpha j}^2=1 \quad (j=p+1, \cdots, N). \tag{16.4}$$

殘差 $[e_\alpha]$ 因为垂直于每一个 $[x_{\alpha i}]$ $(i=1, \cdots, p)$，所以可以写成

$$e_\alpha=\sum_j z_{\alpha j}v_j. \tag{16.5}$$

一般可以把 N 維空間的任意矢量写成 $[x_{\alpha i}]$ $(i=1, \cdots, p)$ 和 $[z_{\alpha j}]$ $(j=p+1, \cdots, N)$ 的綫性組合。特别是数据矢量 $[y_\alpha]$ 可以表达为

---

[1] Scheffé [28] 有更深入更詳尽的討論。——譯者注

$$[y_\alpha]=\sum_i b_i[x_{\alpha i}]+\sum_j v_j[z_{\alpha j}], \tag{16.6}$$

此处

$$b_i=\sum_\alpha y_\alpha x_{\alpha i}/\sum_\alpha x_{\alpha i}^2 \quad (i=1, \cdots, p) \tag{16.7}$$

是 $\beta_i(i=1, \cdots, p)$ 的最小二乘估計，而

$$v_j=\sum_\alpha y_\alpha z_{\alpha j} \quad (j=p+1, \cdots, N) \tag{16.8}$$

是(16.5)中的系数。

对标准化正交系 $[x_{\alpha i}/s_i]$ $(i=1,\cdots,p)$ 和 $[z_{\alpha j}]$ $(j=p+1,\cdots,N)$ 来說，矢量 $[y_\alpha]$ 可以分解为

$$[y_\alpha]=\sum_i b_i s_i[x_{\alpha i}/s_i]+\sum_j v_j[z_{\alpha j}]. \tag{16.9}$$

这又可以看做是从原坐标 $y_1, \cdots, y_N$ 变换为新的坐标 $b_1 s_1, \cdots, b_p s_p, v_{p+1}, \cdots, v_N$。

这个变换是正交变换。因此可以把概率元素

$$\prod_{\alpha=1}^{N}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_\alpha-\sum_i x_{\alpha i}\beta_i)^2\right\}\right]dy_1\cdots dy_N \tag{16.10}$$

变换为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^N\prod_{i=1}^{p}\exp\left\{-\frac{(b_i s_i-\beta_i s_i)^2}{2\sigma^2}\right\}\prod_{j=p+1}^{N}\exp\left(-\frac{v_j^2}{2\sigma^2}\right)$$
$$\times d(b_1 s_1)\cdots d(b_p s_p)\,dv_{p+1}\cdots dv_N. \tag{16.11}$$

所以 $b_i s_i$ $(i=1,\cdots,p)$ 与 v_j $(j=p+1,\cdots,N)$ 相互独立，而且 $b_i s_i$ 遵循正态分布 $N(\beta_i s_i, \sigma^2)$，v_j 遵循正态分布 $N(0, \sigma^2)$。

§17 平方和的分解

因为殘差平方和

$$S_E=\sum_\alpha e_\alpha^2=\sum_\alpha(\sum_j z_{\alpha j}v_j)^2=\sum_j v_j^2 \tag{17.1}$$

是遵循正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 的 $(N-p)$ 个独立随机变数 v_j $(j=p+1, \cdots, N)$ 的平方和，所以

$$\chi^2 = S_E / \sigma^2 \tag{17.2}$$

遵循具有$(N-p)$个自由度的 χ^2 分布

［注］ 設有 ϕ 个随机变数 $u_1, \cdots, u_\phi$ 独立地遵循标准正态分布$N(0,1)$，于是

$$\chi^2 = u_1^2 + \cdots + u_\phi^2 \tag{17.3}$$

遵循具有 ϕ 个自由度的 χ^2 分布。它的概率元素可以計算为

$$\int_{\chi^2 < \sum_i u_i^2 < \chi^2 + d(\chi^2)} \cdots \int \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^\phi \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_i u_i^2\right) du_1 \cdots du_\phi$$

$$= \text{const.} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right) \int_{\chi^2 < \sum_i u_i^2 < \chi^2 + d(\chi^2)} \cdots \int du_1 \cdots du_\phi$$

$$= \text{const.} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right) d(C\chi^\phi)$$

$$= \text{const.} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right) (\chi^2)^{\phi/2-1} d(\chi^2), \tag{17.4}$$

此处，最后的 const. 必須是 $(1/2)^{\phi/2}/\Gamma(\phi/2)$，因为关于 χ^2 从 0 到 ∞ 积分得1。

数据的平方和 $\sum_\alpha y_\alpha^2$ 对坐标变换 (16.9)（是不变式），可以变换为

$$\sum_\alpha y_\alpha^2 = \sum_i (b_i s_i)^2 + \sum_j v_j^2. \tag{17.5}$$

其中，$\sum_j v_j^2$ 是殘差平方和，这在上面已經討論过。第一項 $\sum_i (b_i s_i)^2$ 含有参数的影响，所以 $\sum_i (b_i s_i)^2/\sigma^2$ 遵循具有 p 个自由度和非中心参数 $\delta = \{\sum_i (\beta_i s_i)^2/\sigma^2\}^{\frac{1}{2}}$ 的非中心 χ^2 分布。又若把它分解为若干个分量时，包含着 $i=1, 2, \cdots, p$ 中的某 q 个分量的自由度则为 q，而且 $\sum_i$ 的 i 只能在 q 个数上变动，因而上面的結果仍然成立。

［注］ 設有 ϕ 个随机变数 $u_1, \cdots, u_\phi$ 独立地遵循标准正态分布 $N(0, 1)$，于是

$$\chi'^2 = (u_1 + \delta_1)^2 + \cdots + (u_\phi + \delta_\phi)^2 \tag{17.6}$$

遵循具有 ϕ 个自由度和非中心参数

$$\delta=\sqrt{\delta_1^2+\cdots+\delta_\phi^2}\tag{17.7}$$

的非中心 χ^2 分布。

因为 b_{ts_t} 的数学期望是 β_{ts_t}，方差是 σ^2，所以

$$\begin{aligned}E\{(b_ts_t)^2\}&=V(b_ts_t)+\{E(b_ts_t)\}^2\\&=\sigma^2+(\beta_ts_t)^2.\end{aligned}\tag{17.8}$$

因此，令 $\sum\limits_i^q$ 为 $i=1, \cdots, p$ 中的任意 q 个的和，便有

$$E\left\{\sum_i^q(b_ts_t)^2\right\}=q\sigma^2+\sum_i^q(\beta_ts_t)^2.\tag{17.9}$$

例 1 在 s^m 型正交陣列的情形中，对应于(13.5)的数据的分解是

$$y_\alpha=\hat{m}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s-1}u_{\lambda_i k}\hat{b}_{ik}+e_\alpha\quad(\alpha=1, 2, \cdots, N),\tag{17.10}$$

而相应的数据平方和的分解是

$$\sum_\alpha y_\alpha^2=N\hat{m}^2+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s-1}\frac{N}{s}\hat{b}_{ik}^2+\sum_\alpha e_\alpha^2.\tag{17.11}$$

参数的个数是 $p=1+m(s-1)$，殘差平方和 $S_E=\sum\limits_\alpha e_\alpha^2$ 是这样的分布：它可表示为具有 $\phi=(N-p)$ 个自由度的 χ^2 与 σ^2 的乘积。它的数学期望是 $(N-p)\sigma^2$。把其余部分分解为下列$(1+m)$个分量：

$$S_M=N\hat{m}^2,\tag{17.12}$$

$$S_i=\sum_{k=1}^{s-1}\frac{N}{s}\hat{b}_{ik}^2\quad(i=1, \cdots, m),\tag{17.13}$$

于是 S_M/σ^2 遵循具有 1 个自由度和非中心参数 $\delta=\sqrt{N}\mu$ 的非中心 χ^2 分布；而 S_i/σ^2 遵循具有$(s-1)$个自由度和非中心参数

$$\delta_i=(N/s)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_k\beta_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}\tag{17.14}$$

的非中心 χ^2 分布。它們的数学期望是

$$\left.\begin{aligned}&E(S_M)=\sigma^2+N\hat{\mu}^2,\\&E(S_i)=(s-1)\sigma^2+(N/s)\sum_k\hat{\beta}_{ik}^2.\end{aligned}\right\}\tag{17.15}$$

这时，若定义“无偏方差”为

$$\left.\begin{aligned}&V_E=S_E/(N-p),\\&V_i=S_i/(s-1)\quad(i=1,\cdots,m),\\&V_M=S_M/1,\end{aligned}\right\}\tag{17.16}$$

则有

$$\left.\begin{aligned}&E(V_E)=\sigma^2,\\&E(V_i)=\sigma^2+(N/s)(\sum_k\hat{\beta}_{ik}^2)/(s-1)\quad(i=1,\cdots,m),\\&E(V_M)=\sigma^2+N\hat{\mu}^2.\end{aligned}\right\}\tag{17.17}$$

通常把它們列为“方差分析表”如表 17.1。

表 17.1 方差分析表(s^m 型正交陣列)

变 因	平方和	自由度	无偏方差	无偏方差的数学期望
平 均	S_M	1	V_M	$\sigma^2+N\hat{\mu}^2$
因 子 F_1	S_1	$s-1$	V_1	$\sigma^2+(N/s)\sigma_1^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
因 子 F_m	S_m	$s-1$	V_m	$\sigma^2+(N/s)\sigma_m^2$
殘 差	S_E	$N-p$	V_E	σ^2
和	$\sum_{\alpha} y_\alpha^2$	N	—	—

表中 σ_i^2 叫做第 i 因子的“方差分量”，其定义是

$$\sigma_i^2=(\sum_k\hat{\beta}_{ik}^2)/(s-1)\quad(i=1,\cdots,m).\tag{17.18}$$

若以原参数(参看(13.1))来表达，就是

$$\sigma_i^2=\{\sum_\lambda\beta_{i\lambda}^2-(\sum_\lambda\beta_{i\lambda})^2/s\}/(s-1)\quad(i=1,\cdots,m).\tag{17.19}$$

在表 17.1 中，方差分量的系数(N/s)等于第 i 因子的各水平的重复次数。

[注 1] 平方和分量的实际計算，按照 §13 的記号如下地进行，頗为方便。

$$\left.\begin{array}{l}S_M=G^2/N,\\ S_i=(\sum_\lambda B_{i\lambda}^2)/(N/s)-(G^2/N)\quad(i=1,\cdots,m),\\ S_E=\sum_\alpha y_\alpha^2-\sum_i(\sum_\lambda B_{i\lambda}^2)/(N/s)+(m-1)(G^2/N).\end{array}\right\}\quad(17.20)$$

［注 2］ 当交互作用存在时，按照 §14 的方法处理，则上面的討論仍然成立。但是，例如对表 14.1 的情形，一般是把 S_3 和 S_4（通常記作 $S_{(AB)}$ 和 $S_{(AB^2)}$）凑在一起記作 $S_{A\times B}$，并把它看做具有 4 个自由度的分量。

例 2 在正交多因子設計（§15）中，对应于（15.20）的数据的分解是

$$y_\alpha=\dot{b}_0+\sum_J\sum_{K_J}U_J(A_J(\alpha),K_J)\dot{b}_J(K_J)+e_\alpha$$

$$(\alpha=1,\cdots,N),\quad(17.21)$$

平方和的分解是

$$\sum_\alpha y_\alpha^2=N\dot{b}_0^2+\sum_J\sum_{K_J}\left(N\prod_{j\in J}\frac{1}{s_j}\right)\dot{b}_J(K_J)^2+\sum_\alpha e_\alpha^2.\quad(17.22)$$

平方和分量是：

平均：　$S_M=N\dot{b}_0^2,$　(17.23)

因子效应 J：　$S_J=\left(N\prod_{j\in J}\frac{1}{s_j}\right)\sum_{K_J}\dot{b}_J(K_J)^2\quad(J\in\mathfrak{J}),$　(17.24)

殘差：　$S_E=\sum_\alpha e_\alpha^2.$　(17.25)

它們的自由度分别是：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{平均：} & \phi_M=1,\\ \text{因子效应 } J\text{：} & \phi_J=\prod_{j\in J}(s_j-1),\\ \text{殘差：} & \phi_E=N-p=N-1-\sum_J\phi_J,\end{array}\right\}\quad(17.26)$$

于是得方差分析表如表 17.2。

表中，对因子效应 J，我們用

$$n_J=N\prod_{j\in J}\frac{1}{s_j}\quad(17.27)$$

表示各水平組合 A_J 的重复次数，并定义了“方差分量”为

$$\sigma_J^2 = \sum_{K_J} \beta_J (K_J)^2 / \phi_J. \tag{17.28}$$

表 17.2　方差分析表(正交多因子設計)

变因	平方和	自由度	无偏方差	无偏方差的数学期望
平均	S_M	1	V_M	$\sigma^2+N\beta_0^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
J	S_J	ϕ_J	V_J	$\sigma^2+n_J\sigma_J^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
殘差	S_E	ϕ_E	V_E	σ^2
和	$\sum_\alpha y_\alpha^2$	N	—	—

[注]　把(15.32)代入(17.24)，并如(15.38)那样計算，便得

$$
\begin{aligned}
S_J &= \left(\frac{1}{N}\prod_{j\in J} s_j\right)\sum_{K_J}\left\{\sum_{\Lambda_J} U_J(\Lambda_J, K_J) B_J(\Lambda_J)\right\}^2 \\
&= \left(\frac{1}{N}\prod_{j\in J} s_j\right)\sum_{\Lambda_J}\sum_{\Lambda'_J}\sum_{K_J} U_J(\Lambda_J, K_J) U_J(\Lambda'_J, K_J) B_J(\Lambda_J) B_J(\Lambda'_J) \\
&= \left(\frac{1}{N}\prod_{j\in J} s_j\right)\sum_{\Lambda_J}\sum_{\Lambda'_J} B_J(\Lambda_J) B_J(\Lambda'_J)\prod_{j\in J}\left(\delta_{\lambda_j\lambda'_j}-\frac{1}{s_j}\right) \\
&= \left(\frac{1}{N}\prod_{j\in J} s_j\right)\left\{\sum_{J'\subset J}\sum_{\Lambda'_J} B_{J'}(\Lambda_{J'})^2\prod_{j\in(J-J')}\left(-\frac{1}{s_j}\right)+G^2\prod_{j\in J}\left(-\frac{1}{s_j}\right)\right\} \\
&= \sum_{J'\subset J}\frac{(-1)^{t-t'}}{N}\left(\prod_{j\in J'} s_j\right)\sum_{\Lambda'_J} B_{J'}(\Lambda_{J'})^2+(-1)^t\frac{G^2}{N} \\
&= \sum_{J'\subset J}\frac{(-1)^{t-t'}}{n_{J'}}\sum_{\Lambda'_J} B_{J'}(\Lambda_{J'})^2+(-1)^t\frac{G^2}{N}.
\end{aligned} \tag{17.29}
$$

这样，当进行实际計算时，預先求 G^2/N 和 $\sum_{\Lambda_J} B_J(\Lambda_J)^2/n_J\ (J\in\mathfrak{J})$，然后再根据(17.29)作加或减，就可以求得平方和分量。例如，若 $J=\{1, 2\}$，則可从

$$S_{12}=\frac{1}{n_{12}}\sum_{\lambda_1\lambda_2} B_{12}(\lambda_1, \lambda_2)^2-\frac{1}{n_1}\sum_{\lambda_1} B_1(\lambda_1)^2-\frac{1}{n_2}\sum_{\lambda_2} B_2(\lambda_2)^2+\frac{1}{N}G^2 \tag{17.30}$$

来計算。

例 3　利用正交多項式配二次式(§ 10)的方差分析表如表 17.3。

这时，“无偏方差的数学期望”这一栏与其說是用来估計 β_i^2，毋宁說是用来讀取 β_i 的估計量 b_i 的方差 σ^2/S_i (以及为了讀取 S_i 的数值)。

表17.3 方差分析表(正交多项式)

变 因	平方和	自由度	无偏方差	无偏方差的数学期望
平 均	$(\sum y)^2/n$	1	V_M	$\sigma^2+n\beta_0^2$
一次效应	$(\sum yX_1)^2/S_1$	1	V_1	$\sigma^2+S_1\beta_1^2$
二次效应	$(\sum yX_2)^2/S_2$	1	V_2	$\sigma^2+S_2\beta_2^2$
残 差	S_E	$n-3$	V_E	σ^2
和	$\sum y^2$	n	—	—

§18 F 检 验

如上节所述，設数据的平方和可以分解为殘差平方和 S_E 以及其他的几个分量。除殘差平方和以外，其他分量都受到某些“效应”的影响。令其中的一个为 S_1，那末依照(17.9)記号的意义，可以把它写成

$$S_1=\sum_i^{\phi_1}(b_i s_i)^2. \tag{18.1}$$

于是 S_1/σ^2 遵循具有 ϕ_1 个自由度和非中心参数

$$\delta_1=\left\{\sum_i^{\phi_1}(\beta_i s_i)^2/\sigma^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{18.2}$$

的非中心 χ^2 分布。另一方面，S_E/σ^2 遵循具有 $\phi_E=(N-p)$ 个自由度的 χ^2 分布。这样，

$$F=\frac{S_1/\phi_1}{S_E/\phi_E} \tag{18.3}$$

遵循具有 ϕ_1 和 ϕ_E 个自由度以及非中心参数 δ_1 的非中心 F 分布(注1)。

如果 $\delta_1=0$，換句話說，如果(18.2)所包含的效应 β_i 实际上不存在，那末(18.3)遵循具有 ϕ_1 和 ϕ_E 个自由度的 F 分布。令这个 F 分布的上側5%的点为 $F_{0.05}$，于是当 $\delta_1=0$ 时，有

$$\Pr\{F>F_{0.05}\}=0.05, \tag{18.4}$$

若 $\delta_1>0$，則 F 的分布偏右，δ_1 越大就越偏右，因而

$$P=\Pr\{F>F_{0.05}\} \tag{18.5}$$

就越来越大(图 18.1)。这就是説，事件 $F>F_{0.05}$ 当 $\delta_1=0$ 时是罕見的，但是随着 δ_1 的增大而越来越容易出現。假如从观测值算出的 F 大于 $F_{0.05}$ 时判定 $\delta_1>0$，那末当 $\delta_1=0$ 时錯誤地判定为 $\delta_1>0$ 的概率(冒險率，显著性水平)是 5%，而当 $\delta_1>0$ 时判定为 $\delta_1>0$ 的概率(檢驗功效)，如图 18.2 所示，随着 δ_1 的增大而增大，甚至几乎达到 100%．这就是 F 檢驗。

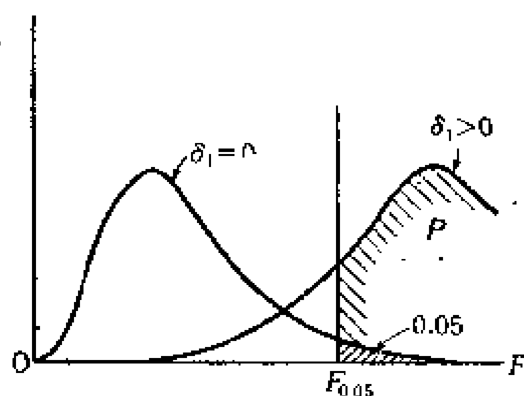


图 18.1 F 檢驗

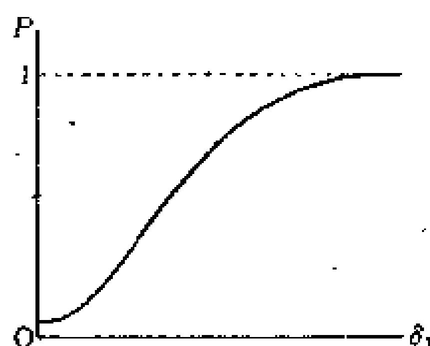


图 18.2 檢驗功效曲綫

[注 1] 令 $\chi_1'^2$ 和 χ_2^2 为独立，而且 $\chi_1'^2$ 遵循具有 ϕ_1 个自由度和非中心参数 δ_1 的非中心 χ^2 分布，χ_2^2 遵循具有 ϕ_2 个自由度的 χ^2 分布，于是 $(\chi_1'^2/\phi_1)/(\chi_2^2/\phi_2)$ 遵循具有 ϕ_1 和 ϕ_2 个自由度以及非中心参数 δ_1 的非中心 F 分布。特别当 $\delta_1=0$ 时就是普通的 F 分布。

[注 2] F 分布的上側概率 α 的点記作 $F_\alpha(\phi_1, \phi_2)$ 或者 $F^{\phi_1}_{\phi_2}(\alpha)$．$F_\alpha(\phi_1, \phi_2)$ 对于 $\alpha=0.005, 0.01, 0.025, 0.05, 0.10, 0.25, 0.50$ 的表(F 表)已經造出，特别是 0.01 和 0.05 的表經常被利用。

[注 3] 对于种种的 ϕ_1 和 ϕ_2，使(18.5)的 P 等于 0.90 的那些 δ_1 的值已被造成了表❶。

---

❶ Shoji Ura: Rep. Stat. Appl. Res., JUSE, 3 (1954), 23~28；日本科学技术联盟，品质管理用数值表 B, 4~5.

第5章　裂区試驗

§19 分枝設計

到此为止，所討論的模型只包含形如(1.1)的"誤差"ε_α。本章將討論包含多級誤差的模型。作为它的最簡单情形的例子，我們首先考慮

$$y_{\alpha\beta\gamma}=\mu+\varepsilon_\alpha+\varepsilon_{\alpha\beta}+\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\quad(\alpha=1,\cdots,n_1;\ \beta=1,\cdots,n_2;\ \gamma=1,\cdots,n_3).\tag{19.1}$$

这是三級分枝設計，数据总共有 $N=n_1n_2n_3$ 个(图19.1)。每級都包含"誤差"，我們假設这些誤差相互独立，并設第一級誤差 ε_α 遵循 $N(0,\sigma^2_{E1})$，第二級誤差 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 遵循 $N(0,\sigma^2_{E2})$，第三級誤差 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 遵循 $N(0,\sigma^2_{E3})$。順着分枝倒推，把相当于結节的平均記为

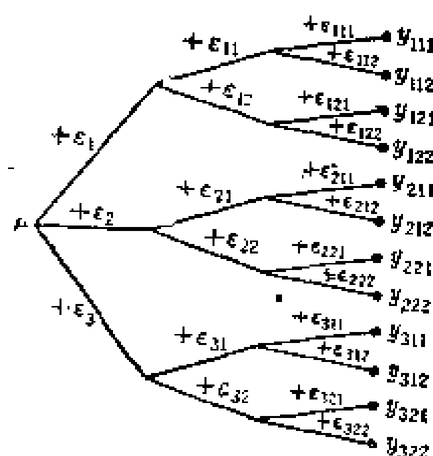


图19.1　三級設計
($n_1=3,\ n_2=2,\ n_3=2$)

$$\left.\begin{aligned}\bar{y}_{\alpha\beta\cdot}&=\frac{1}{n_3}\sum_{\gamma=1}^{n_3}y_{\alpha\beta\gamma},\\ \bar{y}_{\alpha\cdot\cdot}&=\frac{1}{n_2}\sum_{\beta=1}^{n_2}\bar{y}_{\alpha\beta\cdot},\\ \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot}&=\frac{1}{n_1}\sum_{\alpha=1}^{n_1}\bar{y}_{\alpha\cdot\cdot},\end{aligned}\right\}\tag{19.2}$$

此处足碼中的·表示对原足碼的平均。从(19.1)来考察(19.2)的各个平均的构造，便知

$$\left.\begin{aligned}\bar{y}_{\alpha\beta\cdot}&=\mu+\varepsilon_\alpha+\varepsilon_{\alpha\beta}+\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta\cdot},\\ \bar{y}_{\alpha\cdot\cdot}&=\mu+\varepsilon_\alpha+\bar{\varepsilon}_{\alpha\cdot}+\bar{\varepsilon}_{\alpha\cdot\cdot},\\ \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot}&=\mu+\bar{\varepsilon}_{\cdot}+\bar{\varepsilon}_{\cdot\cdot}+\bar{\varepsilon}_{\cdot\cdot\cdot}.\end{aligned}\right\}\tag{19.3}$$

这样，定义

$$\left.\begin{aligned}e_{\alpha\beta\gamma}&\equiv y_{\alpha\beta\gamma}-\bar{y}_{\alpha\beta\cdot}=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}-\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta\cdot},\\ e_{\alpha\beta}&\equiv\bar{y}_{\alpha\beta\cdot}-\bar{y}_{\alpha\cdot\cdot}=(\varepsilon_{\alpha\beta}-\bar{\varepsilon}_{\alpha\cdot})+(\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta\cdot}-\bar{\varepsilon}_{\alpha\cdot\cdot}),\\ e_\alpha&\equiv\bar{y}_{\alpha\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdot\cdot\cdot}=(\varepsilon_\alpha-\bar{\varepsilon}_{\cdot})+(\bar{\varepsilon}_{\alpha\cdot}-\bar{\varepsilon}_{\cdot\cdot})+(\bar{\varepsilon}_{\alpha\cdot\cdot}-\bar{\varepsilon}_{\cdot\cdot\cdot}),\\ m&\equiv\bar{y}_{\cdot\cdot\cdot}=\mu+\bar{\varepsilon}_{\cdot}+\bar{\varepsilon}_{\cdot\cdot}+\bar{\varepsilon}_{\cdot\cdot\cdot},\end{aligned}\right\}\tag{19.4}$$

便有对应于(19.1)的数据分解式

$$y_{\alpha\beta\gamma}=m+e_\alpha+e_{\alpha\beta}+e_{\alpha\beta\gamma}.\tag{19.5}$$

上式右边各项的数学期望和方差是

$$E(m)=\mu,\ E(e_\alpha)=0,\ E(e_{\alpha\beta})=0,\ E(e_{\alpha\beta\gamma})=0,\tag{19.6}$$

$$\left.\begin{aligned}V(m)&=\frac{\sigma^2_{E1}}{n_1}+\frac{\sigma^2_{E2}}{n_1n_2}+\frac{\sigma^2_{E3}}{n_1n_2n_3},\\ V(e_\alpha)&=\frac{n_1-1}{n_1}\sigma^2_{E1}+\frac{n_1-1}{n_1}\cdot\frac{\sigma^2_{E2}}{n_2}+\frac{n_1-1}{n_1}\cdot\frac{\sigma^2_{E3}}{n_2n_3},\\ V(e_{\alpha\beta})&=\frac{n_2-1}{n_2}\sigma^2_{E2}+\frac{n_2-1}{n_2}\cdot\frac{\sigma^2_{E3}}{n_3},\\ V(e_{\alpha\beta\gamma})&=\frac{n_3-1}{n_3}\sigma^2_{E3}.\end{aligned}\right\}\tag{19.7}$$

而且各项是互不相关的(这些性质，反复利用§3中例1的那些性质便可导出)。

取(19.5)的平方，并对所有的数据求和，便得

$$\sum_{\alpha\beta\gamma}y^2_{\alpha\beta\gamma}=n_1n_2n_3m^2+n_2n_3\sum_\alpha e^2_\alpha+n_3\sum_{\alpha\beta}e^2_{\alpha\beta}+\sum_{\alpha\beta\gamma}e^2_{\alpha\beta\gamma}.\tag{19.8}$$

因为，如

$$2n_3\sum_\alpha\sum_\beta e_\alpha e_{\alpha\beta}=2n_3\sum_\alpha e_\alpha\sum_\beta(\bar{y}_{\alpha\beta\cdot}-\bar{y}_{\alpha\cdot\cdot})=0$$

那样，所有的乘积项都消掉了。把(19.8)的右边各项分别記作S_M，S_{E1}，S_{E2}和S_{E3}，正确地写就是

$$
\left.\begin{aligned}
S_M &= n_1 n_2 n_3 m^2 = N\bar{y}_{\cdots}^2,\\
S_{E1} &= n_2 n_3 \sum_{\alpha} (\bar{y}_{\alpha\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdots})^2,\\
S_{E2} &= n_3 \sum_{\alpha}\sum_{\beta} (\bar{y}_{\alpha\beta\cdot} - \bar{y}_{\alpha\cdot\cdot})^2,\\
S_{E3} &= \sum_{\alpha}\sum_{\beta}\sum_{\gamma} (y_{\alpha\beta\gamma} - \bar{y}_{\alpha\beta\cdot})^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (19.9)
$$

利用(19.6)和(19.7)便可算出它們的数学期望为

$$
\left.\begin{aligned}
E(S_M) &= N\mu^2 + n_2 n_3 \sigma_{E1}^2 + n_3 \sigma_{E2}^2 + \sigma_{E3}^2,\\
E(S_{E1}) &= (n_1 - 1)(n_2 n_3 \sigma_{E1}^2 + n_3 \sigma_{E2}^2 + \sigma_{E3}^2),\\
E(S_{E2}) &= n_1 (n_2 - 1)(n_3 \sigma_{E2}^2 + \sigma_{E3}^2),\\
E(S_{E3}) &= n_1 n_2 (n_3 - 1)\sigma_{E3}^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (19.10)
$$

"自由度"分别是(注 2)

$$
\phi_M = 1,\ \phi_{E1} = n_1 - 1,\ \phi_{E2} = n_1(n_2 - 1),\ \phi_{E3} = n_1 n_2 (n_3 - 1), \qquad (19.11)
$$

于是得方差分析表如表 19.1。

表 19.1 方差分析表(三級設計)

变 因	平方和	自由度	无偏方差	无偏方差的数学期望
平 均	S_M	1	V_M	$\sigma_{E3}^2 + n_3\sigma_{E2}^2 + n_2 n_3 \sigma_{E1}^2 + N\mu^2$
誤差 1	S_{E1}	$n_1 - 1$	V_{E1}	$\sigma_{E3}^2 + n_3\sigma_{E2}^2 + n_2 n_3 \sigma_{E1}^2$
誤差 2	S_{E2}	$n_1(n_2 - 1)$	V_{E2}	$\sigma_{E3}^2 + n_3\sigma_{E2}^2$
誤差 3	S_{E3}	$n_1 n_2 (n_3 - 1)$	V_{E3}	σ_{E3}^2
和	$\sum y^2$	N	—	—

因此各級的誤差方差可以估計为

$$
\left.\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{E1}^2 &= (V_{E1} - V_{E2})/n_2 n_3,\\
\hat{\sigma}_{E2}^2 &= (V_{E2} - V_{E3})/n_3,\\
\hat{\sigma}_{E3}^2 &= V_{E3}.
\end{aligned}\right\} \qquad (19.12)
$$

μ 的估計量 $m = \bar{y}_{\cdots}$ 的方差已在 (19.7) 的第一式看到，而在表 19.1 中，它则等于用 μ^2 的系数 N 去除 V_M 的数学期望中不包含 μ 的那些部分。于是可以用 V_{E1}/N 来估計它。

[注 1] 当进行平方和分量的实际数値計算时，最好是先求出小和、中和、大和：

$$Y_{\alpha\beta\cdot}=\sum_{\gamma}y_{\alpha\beta\gamma},\quad Y_{\alpha\cdot\cdot}=\sum_{\beta}Y_{\alpha\beta\cdot},\quad Y_{\cdot\cdot\cdot}=\sum_{\alpha}Y_{\alpha\cdot\cdot},\tag{19.13}$$

然后再利用公式：

$$\left.\begin{aligned}&S_M=Y^2_{\cdot\cdot\cdot}/N,\\&S_{E1}=\sum_{\alpha}Y^2_{\alpha\cdot\cdot}/n_2n_3-Y^2_{\cdot\cdot\cdot}/N,\\&S_{E2}=\sum_{\alpha\beta}Y^2_{\alpha\beta\cdot}/n_3-\sum_{\alpha}Y^2_{\alpha\cdot\cdot}/n_2n_3,\\&S_{E3}=\sum_{\alpha\beta\gamma}y^2_{\alpha\beta\gamma}-\sum_{\alpha\beta}Y^2_{\alpha\beta\cdot}/n_3.\end{aligned}\right\}\tag{19.14}$$

[注 2] 例如，S_{E2} 的自由度 ϕ_{E2} 是这样計算的：由于(19.9)的第三式包含的$(\bar{y}_{\alpha\beta\cdot}-\bar{y}_{\alpha\cdot\cdot})$总共有 n_1n_2 个，而且恒满足 n_1 个关系

$$\sum_{\beta}(\bar{y}_{\alpha\beta\cdot}-\bar{y}_{\alpha\cdot\cdot})=0\quad(\alpha=1,\cdots,n_1),\tag{19.15}$$

因此可以由 $\phi_{E2}=n_1n_2-n_1=n_1(n_2-1)$ 来計算。ϕ_{E1} 和 ϕ_{E3} 也是如此。

§20 正交裂区試驗

考虑在上节的模型(19.1)中再加上各种因子效应的模型。这种模型的数据通常在所謂"混杂法"的試驗設計中得到。其中的特殊情形有人叫做"裂区法"，但如

$$y_{\alpha\beta}=\mu+\left(\sum_{i=1}^{p_1}x_{\alpha i}\beta_i+\varepsilon_\alpha\right)+\left(\sum_{j=1}^{p_2}x_{\alpha\beta j}\gamma_j+\varepsilon_{\alpha\beta}\right)\tag{20.1}$$

$$(\alpha=1,\cdots,n_1;\beta=1,\cdots,n_2)$$

所示，这里更广范地把分枝的各級含有参数效应的构造模型叫做"裂区模型"。特别把依

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\alpha}x_{\alpha i}=0,\\&\sum_{\alpha}x_{\alpha i}x_{\alpha i'}=0\quad(i\neq i'),\\&\sum_{\beta}x_{\alpha\beta j}=0,\\&\sum_{\beta}x_{\alpha\beta j}x_{\alpha\beta j'}=0\quad(j\neq j')\end{aligned}\right\}\tag{20.2}$$

意义的正交設計叫做正交裂区試驗設計。关于誤差，如上节一样，假設 ε_α 是遵循 $N(0,\sigma_{E1}^2)$ 的独立随机变数，$\varepsilon_{\alpha\beta}$ 是遵循 $N(0,\sigma_{E2}^2)$ 的独立随机变数。

例 1 图 20.1 所示的例子是在构造式(20.1)中令 $n_1=4, n_2=2, p_1=1, p_2=2$ 的情形，其系数 $x_{\alpha i}$, $x_{\alpha\beta j}$ 如表 20.1 所示。

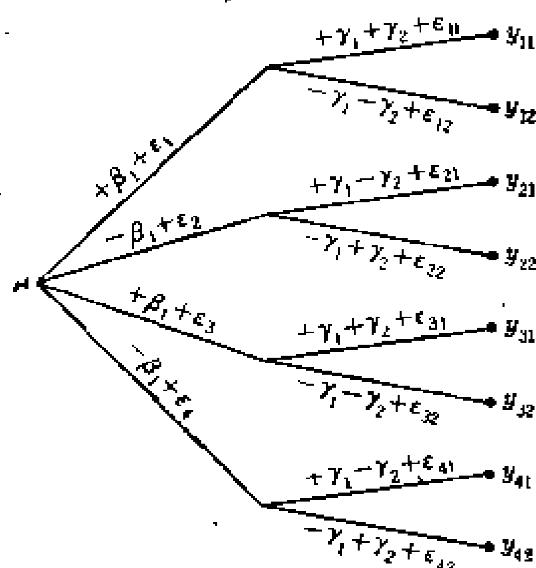


图 20.1 裂区試驗的例子

表 20.1 构造表

α	$x_{\alpha 1}$	β	$x_{\alpha\beta 1}$	$x_{\alpha\beta 2}$
1	+1	1	+1	+1
		2	−1	−1
2	−1	1	+1	−1
		2	−1	+1
3	+1	1	+1	+1
		2	−1	−1
4	−1	1	+1	−1
		2	−1	+1

从表中立刻看出，这些系数满足依(20.2)意义的正交性。

［注］ 在这个例子中，μ 是"一般平均"。取二水平的因子 2 个，若計划安排因子組合使得它們的主要效应分别为 γ_1 和 γ_2（参看 §12），則 β_1 是交互作用。这时，若把 α 看做"区組号数"，則交互作用与区組效应 ε_α 混杂（"混杂法"）❶。

另一方面，若設計使这两个因子的主要效应分别为 β_1 和 γ_1，則 γ_2 是交互作用。这时一个主要效应与区組混杂（"裂区法"）❷。

为了分析模型 (20.1) 的正交裂区試驗数据，首先要进行类似于上节分枝試驗的分析。也就是說，考虑平均值

$$\left.\begin{aligned}\bar{y}_{\alpha\cdot}&=\mu+\sum_i x_{\alpha i}\beta_i+\varepsilon_\alpha+\bar{\varepsilon}_{\alpha\cdot},\\ \bar{y}_{\cdot\cdot}&=\mu+\bar{\varepsilon}_{\cdot}+\bar{\varepsilon}_{\cdot\cdot}\end{aligned}\right\}\qquad(20.3)$$

❶ 見 §14 譯者注。詳見 Cochran-Cox[4]，Kempthorne [9]，北川 [21, II] 和增山[22]。——譯者注

❷ 詳見 Cochran-Cox [4] 和 Kempthorne [9]。——譯者注

(利用了(20.2)的第一式和第三式),并把数据分解为

$$y_{\alpha\beta}=\bar{y}_{..}+(\bar{y}_{\alpha.}-\bar{y}_{..})+(y_{\alpha\beta}-\bar{y}_{\alpha.})_{\circ} \tag{20.4}$$

取上式的平方,然后求和便得

$$\sum_{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}^2=n_1n_2\bar{y}_{..}^2+n_2\sum_{\alpha}(\bar{y}_{\alpha.}-\bar{y}_{..})^2+\sum_{\alpha\beta}(y_{\alpha\beta}-\bar{y}_{\alpha.})^2. \tag{20.5}$$

从此再去分析各級的平方和分量。因为对 $\bar{y}_{..}$ 不能再作进一步的分析,故可以置之不动。对于 $\bar{y}_{\alpha.}$,由(20.3)可知,这是第4章所討論的单純正交設計的数据,所以 β_i 的估計值由

$$b_i=\sum_{\alpha}x_{\alpha i}\bar{y}_{\alpha.}/\sum_{\alpha}x_{\alpha i}^2 \quad (i=1, \cdots, p) \tag{20.6}$$

給出。利用上式可以把 $\bar{y}_{\alpha.}$ 分解为

$$\bar{y}_{\alpha.}=\bar{y}_{..}+\sum_{i}x_{\alpha i}b_i+e_{\alpha}, \tag{20.7}$$

于是取其平方和便得

$$\sum_{\alpha}\bar{y}_{\alpha.}^2=n_1\bar{y}_{..}^2+\sum_{i}(\sum_{\alpha}x_{\alpha i}^2)b_i^2+\sum_{\alpha}e_{\alpha}^2. \tag{20.8}$$

从上式左边减去右边第一項就是 $\sum_{\alpha}(\bar{y}_{\alpha.}-\bar{y}_{..})^2$,所以

$$n_2\sum_{\alpha}(\bar{y}_{\alpha.}-\bar{y}_{..})^2=n_2\sum_{i}(\sum_{\alpha}x_{\alpha i}^2)b_i^2+n_2\sum_{\alpha}e_{\alpha}^2. \tag{20.9}$$

因为(20.3)的誤差項的方差是

$$V(\varepsilon_{\alpha}+\bar{\varepsilon}_{\alpha.})=\sigma_{E1}^2+\sigma_{E2}^2/n_2, \tag{20.10}$$

所以 $\sum_{\alpha}e_{\alpha}^2$ 的数学期望是 $(n_1-1-p_1)(\sigma_{E1}^2+\sigma_{E2}^2/n_2)$,从而

$$S_{E1}=n_2\sum_{\alpha}e_{\alpha}^2 \tag{20.11}$$

的数学期望是

$$E(S_{E1})=(n_1-1-p_1)(\sigma_{E2}^2+n_2\sigma_{E1}^2), \tag{20.12}$$

至于第二阶段的分析,从(20.1)减去(20.3)便得

$$y_{\alpha\beta}-\bar{y}_{\alpha.}=\sum_{j}x_{\alpha\beta j}\gamma_j+\varepsilon_{\alpha\beta}-\bar{\varepsilon}_{\alpha.}, \tag{20.13}$$

于是看来可以考虑形如

$$y_{\alpha\beta}=\mu_{\alpha}+\sum_{j}x_{\alpha\beta j}\gamma_j+\varepsilon_{\alpha\beta} \tag{20.14}$$

的模型。在(20.14)中,μ_{α} 和 γ_j 的最小二乘估計分别由

$$m_\alpha = \bar{y}_{\alpha\cdot}, \tag{20.15}$$

$$c_j = \sum_{\alpha\beta}' x_{\alpha\beta j} y_{\alpha\beta} \Big/ \sum_{\alpha\beta}' x_{\alpha\beta j}^2 \tag{20.16}$$

給出，因而数据的分解式变成

$$y_{\alpha\beta} = \bar{y}_{\alpha\cdot} + \sum_j' x_{\alpha\beta j} c_j + e_{\alpha\beta}, \tag{20.17}$$

平方和的分解变成

$$\sum_{\alpha\beta}' y_{\alpha\beta}^2 = n_2 \sum_\alpha' \bar{y}_{\alpha\cdot}^2 + \sum_j' \left(\sum_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta j}^2\right) c_j^2 + \sum_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^2. \tag{20.18}$$

而且得到

$$S_{E2} = \sum_{\alpha\beta}' e_{\alpha\beta}^2 \tag{20.19}$$

的数学期望为

$$E(S_{E2}) = \{n_1(n_2-1) - p_2\} \sigma_{E2}^2. \tag{20.20}$$

从 (20.18) 的左边减去右边第一项就是 $\sum_{\alpha\beta}' (y_{\alpha\beta} - \bar{y}_{\alpha\cdot})^2$，所以可得分解

$$\sum_{\alpha\beta} (y_{\alpha\beta} - \bar{y}_{\alpha\cdot})^2 = \sum_j' \left(\sum_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta j}^2\right) c_j^2 + \sum_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^2. \tag{20.21}$$

以上述作为依据，并参看 § 17，便可造出方差分析表如表 20.2。

表 20.2　方差分析表(裂区試驗)

变　因	平　方　和	自由度	无偏方差	无偏方差的数学期望
平　均	$S_M = n_1 n_2 \bar{y}_{\cdot\cdot}^2$	1	V_M	$\sigma_{E2}^2 + n_2\sigma_{E1}^2 + n_1 n_2 \mu^2$
第 1 級	$S_1 = n_2 \sum_\alpha (\bar{y}_{\alpha\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2$	$n_1 - 1$	—	—
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
β_i	$S_{Bi} = n_2 \left(\sum_\alpha x_{\alpha i}^2\right) b_i^2$	1	V_{Bi}	$\sigma_{E2}^2 + n_2\sigma_{E1}^2 + \left(\sum_\alpha x_{\alpha i}^2\right)\beta_i^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
誤差 1	$S_{E1} = n_2 \sum_\alpha e_\alpha^2$	$n_1 - 1 - p_1$	V_{E1}	$\sigma_{E2}^2 + n_2\sigma_{E1}^2$
第 2 級	$S_2 = \sum_{\alpha\beta} (y_{\alpha\beta} - \bar{y}_{\alpha\cdot})^2$	$n_1(n_2 - 1)$	—	—
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
γ_j	$S_{Cj} = \left(\sum_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta j}^2\right) c_j^2$	1	V_{Cj}	$\sigma_{E2}^2 + \left(\sum_{\alpha\beta}' x_{\alpha\beta j}^2\right)\gamma_j^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
誤差 2	$S_{E2} = \sum_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^2$	$n_1(n_2 - 1) - p_2$	V_{E2}	σ_{E2}^2
和	$\sum_{\alpha\beta} y_{\alpha\beta}^2$	$n_1 n_2$	—	—

例 2 对例1，可得方差分析表如表20.3。

表20.3 方差分析表（例1）

变因	平方和	自由度	无偏方差	无偏方差的数学期望
平均	$S_M=8\bar{y}_{..}^2$	1	V_M	$\sigma_{E2}^2+2\sigma_{E1}^2+8\mu^2$
第1級	$S_1=2\sum(\bar{y}_{\alpha.}-\bar{y}_{..})^2$	3	—	—
β_1	$S_{B1}=8b_1^2$	1	V_{B1}	$\sigma_{E2}^2+2\sigma_{E1}^2+8\beta_1^2$
誤差1	$S_{E1}=\cdots$	2	V_{E1}	$\sigma_{E2}^2+2\sigma_{E1}^2$
第2級	$S_2=\sum(y_{\alpha\beta}-\bar{y}_{\alpha.})^2$	4	—	—
γ_1	$S_{C1}=8c_1^2$	1	V_{C1}	$\sigma_{E2}^2+8\gamma_1^2$
γ_2	$S_{C2}=8c_2^2$	1	V_{C2}	$\sigma_{E2}^2+8\gamma_2^2$
誤差2	$S_{E2}=\cdots$	2	V_{E2}	σ_{E2}^2
和	$\sum y^2$	8	—	—

［注 1］ 当进行实际的数值計算时，首先計算下列的和：

$$Y_{\alpha.}=y_{\alpha1}+y_{\alpha2}\quad(\alpha=1,2,3,4),$$
$$Y_{..}=Y_{1.}+Y_{2.}+Y_{3.}+Y_{4.},$$
$$B_1=Y_{1.}-Y_{2.}+Y_{3.}-Y_{4.},$$
$$C_1=y_{11}-y_{12}+y_{21}-y_{22}+y_{31}-y_{32}+y_{41}-y_{42},$$
$$C_2=y_{11}-y_{12}-y_{21}+y_{22}+y_{31}-y_{32}-y_{41}+y_{42}.$$

其次計算

$$(\mathrm{I})=\sum y^2,\quad (\mathrm{II})=(Y_{1.}^2+Y_{2.}^2+Y_{3.}^2+Y_{4.}^2)/2,\quad (\mathrm{III})=Y_{..}^2/8,$$
$$S_{B1}=B_1^2/8,\quad S_{C1}=C_1^2/8,\quad S_{C2}=C_2^2/8,$$

最后由下式就可完成平方和的計算：

$$S_M=(\mathrm{III}),$$
$$S_1=(\mathrm{II})-(\mathrm{III}),\quad S_{E1}=S_1-S_{B1},$$
$$S_2=(\mathrm{I})-(\mathrm{II}),\quad S_{E2}=S_2-S_{C1}-S_{C2}.$$

μ，β_1，γ_1 和 γ_2 的估計值分别由以下各式給出：

$$m=Y_{..}/8,\quad b_1=B_1/8,\quad c_1=C_1/8 \text{ 和 } c_2=C_2/8.$$

［注 2］ σ_{E1}^2 和 σ_{E2}^2 的估計值分别由

$$\hat{\sigma}_{E1}^2=(V_{E1}-V_{E2})/2 \text{ 和 } \hat{\sigma}_{E2}^2=V_{E2}$$

給出。这时由于 V_{E1} 和 V_{E2} 的自由度都很小，所以估計的精度非常低（对于

誤差的估計量，至少要給予5或者6个自由度，最好还是給予10个以上的自由度）。

§21 裂区試驗的估計理論

本节将对裂区試驗作如§5对单純綫性模型所作的那种討論。

首先对分枝設計（§19）的情形，証明（19.12）的$\hat{\sigma}^2_{E1}$，$\hat{\sigma}^2_{E2}$和$\hat{\sigma}^2_{E3}$分别是σ^2_{E1}，σ^2_{E2}和σ^2_{E3}的最优无偏估計。可以把具有构造模型如（19.1）的数据的联合分布概率密度写成：

$$f(y_{111},\cdots,y_{n_1n_2n_3})=\int\cdots\int\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2_{E1}}\right)^{\frac{n_1}{2}}\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2_{E2}}\right)^{\frac{n_1n_2}{2}}\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2_{E3}}\right)^{\frac{n_1n_2n_3}{2}}$$
$$\times\exp\left(-\frac{Q_1}{2\sigma^2_{E1}}-\frac{Q_2}{2\sigma^2_{E2}}-\frac{Q_3}{2\sigma^2_{E3}}\right)$$
$$\times d\varepsilon_1\cdots d\varepsilon_{n_1}\cdots d\varepsilon_{11}\cdots d\varepsilon_{n_1n_2}, \qquad (21.1)$$

此处
$$\left.\begin{aligned}&Q_1=\sum_{\alpha=1}^{n_1}\varepsilon^2_\alpha,\quad Q_2=\sum_{\alpha=1}^{n_1}\sum_{\beta=1}^{n_2}\varepsilon^2_{\alpha\beta},\\&Q_3=\sum_{\alpha=1}^{n_1}\sum_{\beta=1}^{n_2}\sum_{\gamma=1}^{n_3}(y_{\alpha\beta\gamma}-\mu-\varepsilon_\alpha-\varepsilon_{\alpha\beta})^2.\end{aligned}\right\} \qquad (21.2)$$

并假設关于$\varepsilon_\alpha(\alpha=1,\cdots,n_1)$和关于$\varepsilon_{\alpha\beta}(\alpha=1,\cdots,n_1;\ \beta=1,\cdots,n_2)$的积分都从$-\infty$积到$+\infty$。

可以把（21.1）改写为下列形状：

$$f=\left(\frac{1}{2\pi\theta_1}\right)^{\frac{1+\phi_{E1}}{2}}\left(\frac{1}{2\pi\theta_2}\right)^{\frac{\phi_{E2}}{2}}\left(\frac{1}{2\pi\theta_3}\right)^{\frac{\phi_{E3}}{2}}$$
$$\times\exp\left\{-\frac{N(\bar{y}_{\cdots}-\mu)^2+S_{E1}}{2\theta_1}-\frac{S_{E2}}{2\theta_2}-\frac{S_{E3}}{2\theta_3}\right\}, \qquad (21.3)$$

此处S_{E1}，S_{E2}，S_{E3}和ϕ_{E1}，ϕ_{E2}，ϕ_{E3}的定义已分别在（19.9）和（19.11）中給出，而且

$$\left.\begin{aligned}&\theta_1=\sigma^2_{E3}+n_3\sigma^2_{E2}+n_2n_3\sigma^2_{E1},\\&\theta_2=\sigma^2_{E3}+n_3\sigma^2_{E2},\\&\theta_3=\sigma^2_{E3}.\end{aligned}\right\} \qquad (21.4)$$

証明的要点　第一，Q_3 可以分解为

$$Q_3=n_3\sum_{\alpha\beta}(\bar{y}_{\alpha\beta\cdot}-\mu-\varepsilon_\alpha-\varepsilon_{\alpha\beta})^2+S_{E1}. \tag{21.5}$$

第二，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{E2}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n_3}{2\pi\sigma_{E3}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{\varepsilon_{\alpha\beta}^2}{2\sigma_{E2}^2}-\frac{n_3(\bar{y}_{\alpha\beta\cdot}-\mu-\varepsilon_\alpha-\varepsilon_{\alpha\beta})^2}{2\sigma_{E3}^2}\right\}$$

$$\times d\varepsilon_{\alpha\beta}=\left\{\frac{n_3}{2\pi(\sigma_{E3}^2+n_3\sigma_{E2}^2)}\right\}^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{n_3(\bar{y}_{\alpha\beta\cdot}-\mu-\varepsilon_\alpha)^2}{2(\sigma_{E3}^2+n_3\sigma_{E2}^2)}\right\}. \tag{21.6}$$

如此反复計算即可。

［注］ (21.6)相当于下列公式的特殊情形：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_2^2}\right\}dx$$

$$=\left\{\frac{1}{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right\}^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right\}. \tag{21.7}$$

上式表明，若 x 遵循 $N(0,\sigma_1^2)$，y 遵循 $N(0,\sigma_2^2)$，而且 x 和 y 独立，则 $z=x+y$ 遵循 $N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$. (21.7)是这样得到的：先把左边｛ ｝的里边改写为

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2}+\frac{(z-x)^2}{\sigma_2^2}=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(x-\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}z\right)^2+\frac{z^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}, \tag{21.8}$$

然后利用

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(x-\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}z\right)^2\right\}dx=\left(2\pi\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{21.9}$$

取(21.3)的自然对数，便得

$$\ln f=-\frac{N}{2}\ln(2\pi)-\frac{1+\phi_{E1}}{2}\ln\theta_1-\frac{\phi_{E2}}{2}\ln\theta_2-\frac{\phi_{E3}}{2}\ln\theta_3$$

$$-\frac{N(\bar{y}_{\cdots}-\mu)^2+S_{E1}}{2\theta_1}-\frac{S_{E2}}{2\theta_2}-\frac{S_{E3}}{2\theta_3}, \tag{21.10}$$

这时，微分上式便得

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial\theta_1}=-\frac{1+\phi_{E1}}{2\theta_1}+\frac{N(\bar{y}_{\cdots}-\mu)^2+S_{E1}}{2\theta_1^2}, \tag{21.11}$$

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial\theta_2}=-\frac{\phi_{E2}}{2\theta_2}+\frac{S_{E2}}{2\theta_2^2}, \tag{21.12}$$

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial\theta_3}=-\frac{\phi_{E3}}{2\theta_3}+\frac{S_{E3}}{2\theta_3^2},\tag{21.13}$$

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial\mu}=\frac{N(\bar{y}_{\cdots}-\mu)}{\theta_1},\tag{21.14}$$

$$\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2}=-\frac{N}{\theta_1}+\frac{N^2(\bar{y}_{\cdots}-\mu)^2}{\theta_1^2}.\tag{21.15}$$

由此推出

$$(\bar{y}_{\cdots}-\mu)f=\frac{\theta_1}{N}\frac{\partial f}{\partial\mu},\tag{21.16}$$

$$(S_{E1}-\phi_{E1}\theta_1)f=2\theta_1^2\frac{\partial f}{\partial\theta_1}-\frac{\theta_1^2}{N}\frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2},\tag{21.17}$$

$$(S_{E2}-\phi_{E2}\theta_2)f=2\theta_2^2\frac{\partial f}{\partial\theta_2},\tag{21.18}$$

$$(S_{E3}-\phi_{E3}\theta_3)f=2\theta_3^2\frac{\partial f}{\partial\theta_3},\tag{21.19}$$

所以根据§5的定理可知，$\bar{y}_{\cdots}$, S_{E1}, S_{E2} 和 S_{E3} 分别是 μ, $\phi_{E1}\theta_1$, $\phi_{E2}\theta_2$ 和 $\phi_{E3}\theta_3$ 的最优无偏估計。此外，还可推出

$$\left(\frac{V_{E1}-V_{E2}}{n_2n_3}-\frac{\theta_1-\theta_2}{n_2n_3}\right)f$$
$$=\frac{1}{n_2n_3}\left\{\frac{\theta_1^2}{\phi_{E1}}\left(2\frac{\partial f}{\partial\theta_1}-\frac{1}{N}\frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2}\right)-\frac{2\theta_2^2}{\phi_{E2}}\frac{\partial f}{\partial\theta_2}\right\},\tag{21.20}$$

$$\left(\frac{V_{E2}-V_{E3}}{n_3}-\frac{\theta_2-\theta_3}{n_3}\right)f=\frac{1}{n_3}\left\{\frac{2\theta_2^2}{\phi_{E2}}\frac{\partial f}{\partial\theta_2}-\frac{2\theta_3^2}{\phi_{E3}}\frac{\partial f}{\partial\theta_3}\right\}.\tag{21.21}$$

由此可知 $\hat{\sigma}_{E1}^2=(V_{E1}-V_{E2})/n_2n_3$ 和 $\hat{\sigma}_{E2}^2=(V_{E2}-V_{E3})/n_3$ 分别是 $\sigma_{E1}^2=(\theta_1-\theta_2)/n_2n_3$ 和 $\sigma_{E2}^2=(\theta_2-\theta_3)/n_3$ 的最优无偏估計。

[注] 由§5中的系便可算出上述估計量的方差为

$$V(\hat{\sigma}_{E1}^2)=\frac{1}{n_2n_3}\left\{\frac{\theta_1^2}{\phi_{E1}}\left(2\frac{\partial}{\partial\theta_1}-\frac{1}{N}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\right)-\frac{2\theta_2^2}{\phi_{E2}}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right\}\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{n_2n_3}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{n_2n_3}\right)^2\left(\frac{2\theta_1^2}{\phi_{E1}}+\frac{2\theta_2^2}{\phi_{E2}}\right),\tag{21.22}$$

$$V(\hat{\sigma}_{E2}^2)=\frac{1}{n_3}\left(\frac{2\theta_2^2}{\phi_{E2}}\frac{\partial}{\partial\theta_2}-\frac{2\theta_3^2}{\phi_{E3}}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)\frac{\theta_2-\theta_3}{n_3}$$
$$=\left(\frac{1}{n_3}\right)^2\left(\frac{2\theta_2^2}{\phi_{E2}}+\frac{2\theta_3^2}{\phi_{E3}}\right).\tag{21.23}$$

其次，討論具有正交性的（即(20.2)成立的）裂区試験(20.1)的情形。这时 $y_{\alpha\beta}(\alpha=1,\cdots,n_1;\beta=1,\cdots,n_2)$ 的联合分布概率密度是

$$f=\int\cdots\int\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{E1}^2}\right)^{\frac{n_1}{2}}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{E2}^2}\right)^{\frac{n_1n_2}{2}}\exp\left\{-\frac{Q_1}{2\sigma_{E1}^2}-\frac{Q_2}{2\sigma_{E2}^2}\right\}d\varepsilon_1\cdots d\varepsilon_{n_1},\tag{21.24}$$

此处

$$\left.\begin{aligned}Q_1&=\sum_\alpha\varepsilon_\alpha^2,\\Q_2&=\sum_{\alpha\beta}(y_{\alpha\beta}-\mu-\sum_i x_{\alpha i}\beta_i-\varepsilon_\alpha-\sum_j x_{\alpha\beta j}\gamma_j)^2,\end{aligned}\right\}\tag{21.25}$$

并假設关于 $\varepsilon_\alpha(\alpha=1,\cdots,n_1)$ 的积分是从 $-\infty$ 积到 $+\infty$。

如前面一样，(21.24)可以改写为下列形状：

$$f=\left(\frac{1}{2\pi\theta_1}\right)^{\frac{n_1}{2}}\left(\frac{1}{2\pi\theta_2}\right)^{\frac{n_1(n_2-1)}{2}}\exp\left\{-\frac{Q_1'}{2\theta_1}-\frac{Q_2'}{2\theta_2}\right\},\tag{21.26}$$

此处

$$\theta_1=\sigma_{E2}^2+n_2\sigma_{E1}^2,\quad\theta_2=\sigma_{E2}^2;\tag{21.27}$$

$$\left.\begin{aligned}Q_1'&=n_1n_2(\bar{y}_{..}-\mu)^2+n_2\sum_\alpha(\bar{y}_{\alpha.}-\bar{y}_{..}-\sum_i x_{\alpha i}\beta_i)^2,\\Q_2'&=\sum_{\alpha\beta}(y_{\alpha\beta}-\bar{y}_{\alpha.}-\sum_j x_{\alpha\beta j}\gamma_j)^2.\end{aligned}\right\}\tag{21.28}$$

这样，微分 $\ln f$ 便得

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial\mu}&=\frac{n_1n_2(\bar{y}_{..}-\mu)}{\theta_1},\\\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial\beta_i}&=\frac{n_2\sum_\alpha(\bar{y}_{\alpha.}-\bar{y}_{..}-\sum_k x_{\alpha k}\beta_k)x_{\alpha i}}{\theta_1}\\&=\frac{n_2(\sum_\alpha x_{\alpha i}\bar{y}_{\alpha.}-\sum_\alpha x_{\alpha i}^2\beta_i)}{\theta_1},\\\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial\gamma_j}&=\frac{\sum_{\alpha\beta}(y_{\alpha\beta}-\bar{y}_{\alpha.}-\sum_k x_{\alpha\beta k}\gamma_k)x_{\alpha\beta j}}{\theta_2}\\&=\frac{\sum_{\alpha\beta}x_{\alpha\beta j}y_{\alpha\beta}-\sum_{\alpha\beta}x_{\alpha\beta j}^2\gamma_j}{\theta_2},\end{aligned}\right\}\tag{21.29}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} &= -\frac{n_1 n_2}{\theta_1}+\frac{n_1^2 n_2^2(\bar{y}_{..}-\mu)^2}{\theta_1^2},\\
\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial \beta_i^2} &= -\frac{n_2\sum_\alpha x_{\alpha i}^2}{\theta_1}+\frac{n_2^2\left(\sum_\alpha x_{\alpha i}\bar{y}_{\alpha.}-\sum_\alpha x_{\alpha i}^2\beta_i\right)^2}{\theta_1^2},\\
\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma_j^2} &= -\frac{\sum_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta j}^2}{\theta_2}+\frac{\left(\sum_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta j}y_{\alpha\beta}-\sum_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta j}^2\gamma_j\right)^2}{\theta_2^2},
\end{aligned}\right\}\quad(21.30)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial \theta_1} &= -\frac{n_1}{2\theta_1}+\frac{n_1 n_2(\bar{y}_{..}-\mu)^2+n_2\sum_\alpha\left(\bar{y}_{\alpha.}-\bar{y}_{..}-\sum_i x_{\alpha i}\beta_i\right)^2}{2\theta_1^2},\\
\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial \theta_2} &= -\frac{n_1(n_2-1)}{2\theta_2}+\frac{\sum_{\alpha\beta}\left(y_{\alpha\beta}-\bar{y}_{\alpha.}-\sum_j x_{\alpha\beta j}\gamma_j\right)^2}{2\theta_2^2}.
\end{aligned}\right\}\quad(21.31)$$

因而根据 § 5 的定理，从 (21.29) 可以看出 $\bar{y}_{..}$, $b_i=\sum_\alpha x_{\alpha i}\bar{y}_{\alpha.}/\sum_\alpha x_{\alpha i}^2$ 和 $c_j=\sum_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta j}y_{\alpha\beta}/\sum_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta j}^2$ 分别是 μ, β_i 和 γ_j 的最优无偏估計。又可从 (21.31) 和 (21.30) 导出

$$\left.\begin{aligned}
&2\theta_1^2\frac{\partial f}{\partial\theta_1}-\frac{\theta_1^2}{n_1 n_2}\frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2}-\sum_i\frac{\theta_1^2}{n_2\sum_\alpha x_{\alpha i}^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta_i^2}\\
&\qquad=\{S_{E1}-(n_1-1-p_1)\theta_1\}f,\\
&2\theta_2^2\frac{\partial f}{\partial\theta_2}-\sum_j\frac{\theta_2^2}{\sum_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta j}^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma_j^2}\\
&\qquad=\{S_{E2}-(n_1(n_2-1)-p_2)\theta_2\}f.
\end{aligned}\right\}\quad(21.32)$$

所以 S_{E1} 和 S_{E2} 分别是 $(n_1-1-p_1)\theta_1$ 和 $(n_1(n_2-1)-p_2)\theta_2$ 的最优无偏估計。此外还可以得出这样的推論：

$$\hat{\sigma}_{E1}^2=\frac{1}{n_2}\left(\frac{S_{E1}}{n_1-1-p_1}-\frac{S_{E2}}{n_1(n_2-1)-p_2}\right)$$

和
$$\hat{\sigma}_{E2}^2=\frac{S_{E2}}{n_1(n_2-1)-p_2}\quad(21.33)$$

分别是 $\sigma_{E1}^2=(\theta_1-\theta_2)/n_2$ 和 $\sigma_{E2}^2=\theta_2$ 的最优无偏估計

［注］ 正如 § 5 的注 2 所說，卽使放寬正态性的假定，但若把估計量的形

式限定于二次型，則可以得到同样的結論，Graybill❶对分枝試驗所作的研究就是一个例子。另一方面，連求无偏方差的数学期望的式子也可以在更寬的假設下討論。特别有趣的是，可以把各种效应作为由有限总体得到的标本来加以处理❷。

参考文献

讲解統計方法的参考书是很多的，这里仅列出其中很少的一部分。經典著作有：

[1] R. A. Fisher: Statistical Methods for Research Workers (Oliver and Boyd, 1948)。

[2] R. A. Fisher: The Design of Experiments, 5th ed. (Oliver and Boyd, 1949)。

对普及最有貢献的有：

[3] G. W. Snedecor: Statistical Methods. 4th ed. (Iowa State College Press, 1946)(日文譯本——畑村等譯：統計的方法，上、下，岩波，1952)。

[4] W. G. Cochran and G. M. Cox: Experimental Designs (Wiley, 2nd ed., 1957)(日文譯本——田口・松本譯：实験計画法I，II，丸善，第二版，1960)。

理論基础首先要从下列一书所收集的論文中求得：

[5] R. A. Fisher: Contributions to Mathematical Statistics (Wiley, 1950)。

特別接近本书观点的有：

[6] R. C. Bose: Least Square Aspects of Analysis of Variance, Institute of Statistics, Univ. of North Carolina, Mimeo. Ser. 9.

[7] A. Wald: The Efficient Design of Experimental Investigations, Lecture notes (Columbia University, 1943)。

[8] H. B. Mann: Analysis and Design of Experiments (Dover, 1949)(中譯本將由科学出版社出版)。

[9] O. Kempthorne: The Design and Analysis of Experiments (Wiley,

❶ F. A. Graybill: Annals of Math. Stat., **25** (1954), 367～372.

❷ 参看 J. Cornfield and J. W. Tukey: Annals of Math. Stat., **27** (1956), 907～949，以及其文献表。

1952)；(日文譯本——宮城・磯部譯：実験の計画と解析，1～4，日本規格协会，1956)。

欲求更广博的知識，讀下列文献比較适合：

[10] H. Cramér: Mathematical Methods of Statistics (Princeton University Press, 1946)。(有中譯本，人民教育出版社出版)

[11] M. G. Kendall: The Advanced Theory of Statistics, 1, 2 (Griffin, 1948)。

[12] S. S. Wilks: Mathematical Statistics (Princeton Univ. Press, 1943)(日文譯本——小河原正已譯：数理統計学，上、下，春日出版社，1951)。

作为教本的，除上列[10]和[12]以外，还有：

[13] A. M. Mood: Introduction to the Theory of Statistics (McGraw-Hill, 1950)。

[14] Anderson and Bancroft: Statistical Theory in Research (McGraw-Hill, 1952)。

[15] C. R. Rao: Advanced Statistical Methods in Biometric Research (Wiley, 1952)。

[16] M. H. Quenouille: The Design and Analysis of Experiment (Griffin, 1953)。

[17] Bennett and Franklin: Statistical Analysis in Chemistry and Chemical Industry (Wiley, 1954)(日文譯本——奥津恭譯：化学および化学工場における統計解析，I，丸善，1956)。

除了标准方法(本书所討論的)以外，其他方法的例子可参看：

[18] M. G. Kendall: Rank Correlation Methods (Griffin, 1948)。

[19] Dixon and Massey: An Introduction to Statistical Analysis (McGraw-Hill, 1951)。

至于最小二乘法，下列文献值得参考：

[20] W. E. Deming: Statistical Adjustment of Data (Wiley, 1943)(日文譯本——森口繁一譯：推計学によるデータのまとめ方，岩波，1950)。

日本的书物中比較有特点的是：

[21] 北川敏男：実験計画法讲义(培风館)，I(1955)，II(1956)。

[22] 增山元三郎：実験計画法(岩波，1956)。

[23] 增山元三郎：少数例のまとめ方(河出书房，1953)。

至于辞典和表，有：

[24] 中山伊知郎編：統計学辞典(东洋經济新报社，1951；增补版，1957)。
[25] 北川・增山：新編統計数值表(河出书房，1952)。
[26] 北川・三留：实验計画・要因配置表(培风館，1953)。
[27] 品质管理用数值表(日本科学技术連盟)，A，3版(1955)；B (1956)。

譯者补充文献

[28] H. Scheffé: The Analysis of Variance (Wiley, 1959)。
[29] O. L. Davies (Ed.): Design and Analysis of Industrial Experiments (Oliver & Boyd, 2nd ed., 1956)。
[30] K. A. Brownlee: Industrial Experimentation (Chem. Publ. Co. Inc., 1949) (有中譯本，陈蔭枋譯：工业試驗統計，科学出版社，1959；还有俄譯本)。
[31] 增山元三郎：实驗計画法(岩波讲座 現代应用数学，1957)(有中譯本，刘璋温譯：試驗設計法，上海科学技术出版社，即将出版)。
[32] E. J. Williams: Regression Analysis (Wiley, 1959)。
[33] W. T. Federer: Experimental Design (Macmillan, 1955)。

[28]总結了迄今为止的成果，是一本系統的著作，[31]和[22]同样介紹設計的数学理論，对于数学基础較好的讀者，这三本书都值得推荐。[29]和[30]可作为工业特别是化学工业試驗設計的参考；[32]包含各方面的例题，比較实用。[33]被評为"百科全书"，适于查閱。

关于最小二乘法的理論基础，下列文献值得推荐：

[34] Ю. В. Линник: Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, Физматгиз. 1958。